Dugga om Linär algebra. Lösningar till variant 3

1. Beräkna dimensionen och ange en bas för spannet av vektorer:
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning. Beteckna givna vektorer med $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$. Spannet av dessa vektorer är mängden av alla linjära kombinationer

$$x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 + x_4\mathbf{b}_4$$

som per definition är lika med matris-vektor produkt

$$B\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 + x_4\mathbf{b}_4$$

där matrisen B har kolonner $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$ och kolonnvektorn $\mathbf{x}$ har komponenter x_1, x_2, x_3, x_4.

Spannet Span($\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$) av givna vektorer är samma som kolonnrummet av matrisen B. En möjlig bas till kolonnrummet till B består av pivotkolonner i matrisen B. De bestämmas genom Gausselimination på matrisen B.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright}$$

$$\overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser att pivotkolonner är första och tredje kolonner $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ och

$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i matrisen B. De utgör en bas till kolonnrummet och till spannet (Span $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$) av vektorer $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$.

Dimensionen av spannet är $\dim(\mathrm{Span}\,\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}) = 2$.

2. Bestäm standartmatrisen av transformationen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som först roterar vektorer i planet i vinkel 30 grader moturs och sedan speglar dem med avseende på y axeln. Är den transformationen bijektiv?

Lösning. Standartmatrisen A till en linjär transformation $T(x)$ är en matris sådan att $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Den har kolonner $T(\mathbf{e}_1)$ och $T(\mathbf{e}_2)$ där $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är standarta basvektorer i planet $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Rotationen av $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i vinkel 30 grader ($\pi/6$ radianer) moturs (positiv riktning för vinklar) ger vektorn som utgör vinkeln 30 grader med x - axeln och petar åt höger och uppåt: $\begin{bmatrix} \cos(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$.
Spegling av den vektorn i y - axeln ger vektorn $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$och första kolonnen i A.
Rotationen av $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ i vinkel 30 grader ($\pi/6$ radianer) moturs (positiv riktning för vinklar) ger vektorn som utgör vinkeln 60 grader ($\pi/3$ radianer) med x - axeln och petar åt vänster och uppåt: $\begin{bmatrix} -\cos(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$. Spegling av den vektorn i y - axeln ger vektorn $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$och är andra kolonnen i A.

$$A = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

Transformationen T är bijektiv och inverterbar eftersom både spegling och rotation är inverterbara. Man kan också se detta med att analysera standarta matrisen A :

a) observera att kolonnerna i A är linjärt oberoende: två ickeparallella vektorer i planet, eller

b) observera att A har två pivotkolonner genom att göra ett steg i Gauss elimination: addera första raden gånger $1/\sqrt{3}$ till andra raden.

b) med att beräkna determinant av A: $\det(A) = -1 \neq 0$

3. Beräkna egenvärden och så många som möjligt linjärt oberoende egenvektorer till matrisen A.

$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$

Lösning. Vi beräknar först karakteristiska polynomet $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (-1-\lambda)^2 (2-\lambda)$

och ser att det har en rot $\lambda_1 = -1$ med multiplicitet 2 och en enkel rot $\lambda_2 = 2$.

Egenvektorer $\mathbf{x}$ som svarar egenvärdet $\lambda = -1$ uppfyller homogena ekvationen

$$(A + I)\mathbf{x} = 0$$

Vi genomför Gausselimination på matrisen $(A + I)$:

$$\begin{bmatrix} -1+1 & -1 & 0 \\ 0 & 2+1 & -2 \\ 0 & 0 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

eller $x_2 = 0$; $x_3 = 0$ och en fri variabel x_1. Detta ger en linjärt oberoende egenvektor $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Egenvektorer $\mathbf{x}$ som svarar ot egenvärdet $\lambda = 2$ uppfyller homogena ekvationen

$$(A - 2I)\mathbf{x} = 0$$

Vi genomför Gausselimination på matrisen $(A - 2I)$:

$$\begin{bmatrix} -1-2 & -1 & 0 \\ 0 & 2-2 & -2 \\ 0 & 0 & -1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

eller $-3x_1 - x_2 = 0$; $x_3 = 0$.

Detta ger en linjärt oberoende egenvektor $\mathbf{v}_2 = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Egenvektorer $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ som svarar mot olika egenvärden är linjärt oberoende.

Varje uppgift ger 0.5 bonuspoäng till tentan och två omtentor innan nästa läsår.