Dugga om Linär algebra. Lösningar till variant 4.

1. Beräkna dimensionen och ange en bas för kolonnrummet av matrisen A. Vad är dimensionen av nollrummet till A?

   $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}$.

   Lösning.

   Kolonnrummet är spannet $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ av kolonnvektorer i matrisen A. En möjlig bas av kolonnrummet till A består av pivotkolonner i matrisen A. De kan bestämmas genom Gausselimination på matrisen A.

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -4 & 0 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

   $$\overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Matrisen A har tre pivotkolonner: första, tredje och fjärde. De utgör en bas till $Col(A)$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dimensionen av nollrummet är lika med $4 - 3 = 1$ enligt ranksatsen. Alternativt ser vi efter Gauss eliminationen att det finns en frivariabel x_2 i homogena systemet $Ax = 0$ och det måste då ha bara en linjärt oberoende lösning. Det betyder också att nollrummet har dimension 1.

2. Bestäm standartmatrisen av transformationen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som först projicerar vektorer i planet på linjen $y = x$ och sedan roterar dem i vinkel 90 grader medurs. Är den transformationen injektiv?

   Lösning. Standartmatrisen A till en linjär transformation $T(x)$ är en matris sådan att $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Den har kolonner $T(\mathbf{e}_1)$ och $T(\mathbf{e}_2)$ där $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är standarta basvektorer i planet $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Projektionen av $\mathbf{e}_1$ på linjen $x = y$ är $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$. Rotationen av den vektorn i 90 grader medurs blir $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$.

Projektionen av $\mathbf{e}_2$ på linjen $x = y$ är också $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$. Rotationen av den vektorn i 90 grader medurs blir $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$. Standartmatrisen är $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$. transformationen är inte injektiv eftersom flera vektorer (även $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ avbildas i samma vektor $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$).

3. Beräkna egenvärden och så många som möjligt linjärt oberoende egenvektorer till matrisen A.

   $$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -7 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

   Lösning.

   Vi beräknar först karakteristiska polynomet. Vi använder andra kolonnen med 2 nollor för att beräkna determinanten på enklaste möjliga sätt och samtidigt få ett av egenvärden nästan gratis. $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) =$

   $$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 4 \\ -3 & 1-\lambda & -7 \\ -2 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix} =$$

   $$-(1-\lambda)\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -2 & -3-\lambda \end{bmatrix} = -(1-\lambda)\left(\lambda^2 - 1\right) = (1-\lambda)^2(\lambda+1)$$

   Det finns ett multiplet egenvärde med multiplicitet 2: $\lambda_{1,2} = 1$ och ett enkelt egenvärde $\lambda_3 = -1$. Vi måste bestämma hur många linjärt oberoende egenvektorer som hör till multipla egenvärdet. Egenvektorer som hör till λ_3 är linjärt oberoende av dem egenvektorer som hör till $\lambda_1 = 1$. Om $\lambda_{1,2}$ har två linjärt oberoende egenvektorer, så har A tre linjärt oberoende egenvektorer. Annars om $\lambda_{1,2}$ har bara ett linjärt oberoende egenvektor, så har A två linjärt oberoende egenvektorer.

Vi söker först egevektorer till $\lambda_{1,2}$ som uppfyller homogena ekvationssystemet $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = 0$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & -7 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -7 \\ + & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright}$$

$$\overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$ Det finns bara en fri variabel x_2 och bara en linjärt oberoende vektor $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Detta medför att tillsammans med den egenvektorn som hör till λ_3 har matrisen A två linjärt oberoende vektorer.

Vi bestämmer den egenvektor som hör till λ_3 och uppfyller homogena systemet $(A - \lambda_3 I)\,\mathbf{x} = 0.$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & -7 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\curvearrowright} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det finns en fri variabel x_3 och en linjärt oberoende vektor kan väljas som $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ eller annan vektor parallell med den: $C \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ med godtycklig $C \neq 0$.

Varje uppgift ger 0.5 bonuspoäng till tentan och två omtentor innan nästa läsår.