Dugga om integraler. Lösningar till Variant 1.

1. Beräkna primitiv funktion: $\int x^2e^{-2x}dx = -\frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{2}x^2e^{-2x}$.

   Man löser uppgiften med att integrera partiellt två gånger:

   $$\int x^2e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \int \left(-xe^{-2x}\right) dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} + \int \frac{1}{2}e^{-2x}\, dx = -\tfrac{1}{4}e^{-2x} - \tfrac{1}{2}xe^{-2x} - \tfrac{1}{2}x^2e^{-2x}$$

2. Beräkna arean mellan grafen till funktionen $y(x) = (x+1)\sqrt{x^2+2x}$ och x - axeln för $x \in [0,1]$.

   $Arean = \int_0^1 (x+1)\sqrt{x^2+2x}dx = \sqrt{3}$.

   Man löser det med hjälp av variabelbytet: $u = x^2+2x$, $du = 2(x+1)dx$, $u(0) = 0$, $u(1) = 3$.

   $$Arean = \int_0^1 (x+1)\sqrt{x^2+2x}dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt{u}du = \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{(3/2)}\bigg|_0^3 = \frac{2}{2}\left(\frac{3^{3/2}}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

3. Beräkna volumen av rotationskroppen byggd med rotation av figuren begränsad av grafen

   $y = \ln(x)$, för $x \in [1,2]$ och linjerna $x = 2$ och $y = 0$, runt y - axeln.

   $$Volum = \int_a^b 2\pi x f(x)dx = \int_1^2 2\pi x \ln(x)dx = 4\pi \ln 2 - \frac{3}{2}\pi$$

   Integralen beräknas med hjälp av partiell integration:

   $$\int 2\pi x \ln(x)dx = \pi x^2 \ln x - \int \pi x\, dx = \pi x^2 \ln x - \frac{1}{2}\pi x^2 = \tfrac{1}{2}x^2\pi\,(2\ln x - 1)$$

   $$\int_1^2 2\pi x \ln(x)dx = \frac{1}{2}x^2\pi\,(2\ln x - 1)\bigg|_{x=1}^2 = 4\pi\ln(2) - 2\pi + \frac{1}{2}\pi = 4\pi\ln 2 - \frac{3}{2}\pi$$

Varje uppgift ger 0.5 bonuspoäng till tentan och två omtentor innan nästa läsår.