Dugga om integraler. Lösningar till variant 2

1. Beräkna primitiv funktion: $\int x^2\cos(3x)dx = \frac{2}{9}x\cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x + \frac{1}{3}x^2\sin 3x$

   Man löser uppgiften med att integrera partiellt två gånger:

   $\int x^2\cos(3x)dx = \frac{1}{3}\int x^2 d\sin(3x) = \frac{1}{3}x^2\sin(3x) - \frac{2}{3}\int \sin(3x)xdx = \frac{1}{3}x^2\sin(3x) + \frac{2}{3}\frac{1}{3}\int xd\cos(3x) =$
   $\frac{1}{3}x^2\sin(3x) + \frac{2}{9}x\cos(3x) - \int \frac{2}{9}\cos(3x)dx = \frac{1}{3}x^2\sin(3x) + \frac{2}{9}x\cos(3x) - \frac{2}{27}\sin(3x)$

2. Beräkna arean mellan grafen till funktionen $y(x) = e^x\sqrt{1-e^x}$ och x - axeln för $x \in [-1,0]$.

   $Arean = \int_{-1}^{0} e^x\sqrt{1-e^x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{1-e^{-1}} - \frac{2}{3}e^{-1}\sqrt{1-e^{-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\sqrt{1-e^{-1}}\right)^{3/2}$
   Man löser uppgiften med hjälp av ett variabelbyte $u = 1-e^x$, $du = -e^x dx$, $u(0)=0$, $u(-1) = 1-e^{-1}$.

   $Arean = \int_{-1}^{0} e^x\sqrt{1-e^x}\,dx = -\int_{1-e^{-1}}^{0}\sqrt{u}du = -\left.\frac{u^{3/2}}{(3/2)}\right|_{1-e^{-1}}^{0} = \frac{2}{3}\left(1-e^{-1}\right)^{3/2}$

3. Beräkna arean av rotationsyta byggd med att kurvan $y = \dfrac{x^3}{3}$ med $x \in [0,1]$ roteras runt x axeln.

$$\begin{aligned}
Arean &= 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}dx = 2\pi\int_0^1\left(\frac{x^3}{3}\right)\sqrt{1+x^4}dx\\
&= 2\pi\left(\frac{1}{3}\right)\int_0^1\left(\frac{1}{4}\right)4x^3\sqrt{1+x^4}dx = 2\pi\left(\frac{1}{12}\right)\int_1^2\sqrt{u}du\\
u &= 1+x^4, \quad du = 4x^3dx, \quad u(0)=1, \quad u(1)=2\\
&= 2\pi\left(\frac{1}{12}\right)\left.\frac{u^{3/2}}{(3/2)}\right|_{u=1}^{2} = \frac{\pi}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)
\end{aligned}$$