Dugga om integraler. Lösningar till Variant 3

1. Beräkna primitiv funktion till rationell funktion: $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}dx =$ $\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(2x+1)$

   Primitiva funktionen beräknas med hjälp av partiellbråksuppdelning $\dfrac{x}{(x+1)(2x+1)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2x+1}$. Then $\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}dx = \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{2x+1}dx = \ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(2x+1)$

2. Beräkna arean mellan grafen till funktionen $y(x) = \dfrac{\cos\left(\sqrt{1+x}\right)}{\sqrt{1+x}}$ och x - axeln för $x \in [1,2]$.

   $Arean = \displaystyle\int_1^2 \frac{\cos\left(\sqrt{1+x}\right)}{\sqrt{1+x}}dx$. Integralen beräknas med hjälp av variabelbytet $u = \sqrt{1+x}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx$, $u(1) = \sqrt{2}$, $u(2) = \sqrt{3}$.

   $Arean = \displaystyle\int_1^2 \frac{\cos\left(\sqrt{1+x}\right)}{\sqrt{1+x}}dx = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \cos(u)du = 2\sin(u)\Big|_{u=\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} =$ $2\left(\sin(\sqrt{3}) - \sin(\sqrt{2})\right)$

3. Beräkna arean av rotationsyta byggd med att kurvan $y = 1 + 2x^2$ med $x \in [0,1]$, roteras runt y - axeln.

   $Arean = 2\pi \displaystyle\int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+(4x)^2}dx = 2\pi \frac{1}{48}\left(17\sqrt{17} - 1\right)$

   Integralen beräknas med hjälp av ett variabelbyte: $u = 1 + 16x^2$, $du = 32xdx$, $dx = \dfrac{1}{32}du$, $u(0) = 1$, $u(1) = 17$.

$$\int_0^1 x\sqrt{1+16x^2}dx = \frac{1}{32}\int_1^{17}\sqrt{u}du = \frac{1}{32}\frac{u^{3/2}}{(3/2)}\Bigg|_{u=1}^{17} = \frac{1}{48}\left(17^{3/2} - 1\right) = \frac{1}{48}\left(17\sqrt{17} - 1\right)$$

Varje uppgift ger 0.5 bonuspoäng till tentan och två omtentor innan nästa läsår.