Dugga om integraler. Lösningen till variant 4

1. Beräkna primitiv funktion: $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^3}dx = -\frac{1}{2x^2}\ln x - \frac{1}{4x^2}$

   Uppgiften löses med hjälp av partiell integration:

   $$\int \frac{\ln(x)}{x^3}dx == -\frac{1}{2x^2}\ln x - \int\left(-\frac{1}{2x^3}\right)dx = -\tfrac{1}{2x^2}\ln x - \tfrac{1}{4x^2}$$

2. Beräkna arean mellan grafen till funktionen

   $y(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}}$ och x - axeln för $x \in [0, \pi/2]$.

   $$Arean = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}}dx = 2\sqrt{2} - 2$$

   Problemet löses med hjälp av variabelbytet: $u = 1 + \sin(x)$, $du = \cos(x)dx$, $u(0) = 1$, $u(\pi/2) = 2$.

   $$Arean = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}}dx = \int_1^2 (u)^{-1/2}du = 2u^{1/2}\Big|_{u=1}^{2} = 2\sqrt{2} - 2$$

3. Beräkna volumen av rotationskroppen byggd med att figuren begränsad av kurvan

   $y = \sin(x)$, $x \in [0, \pi]$ och linjen $y = 0$, roteras runt y - axeln.

   Metoden med cylindriska skal och partiell integration:

$$\begin{aligned} Volum &= \int_a^b 2\pi x\, y(x)dx = \int_0^\pi 2\pi x \sin(x)dx = \\ &= -2\pi\, x\cos(x)\big|_{x=0}^{\pi} + 2\pi\int_0^\pi \cos(x)dx = \\ &= 2\pi^2 \end{aligned}$$

3.b) Gruppen som skrev med Adam fick eventuellt uppgiften med intervall $x \in [0, \pi/2]$.

Lösningen är ganska likadan, med man får andra tal i svaret:

$$
\begin{aligned}
Volum &= \int_a^b 2\pi x\, y(x) dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx = \\
&= -2\pi\ x \cos(x)|_{x=0}^{\pi/2} + 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = \\
&= 2\pi\ \sin(x)|_{x=0}^{x=\pi/2} = 2\pi
\end{aligned}
$$