Matris invers, invers linjär transformation.

Definition. Enhetsmatris I_n är kvadratisk matris av storlek $n \times n$ som har ettor på diagonalen och nollor på alla andra platser, till exempel $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\square$

Kvadratiska matriser A och B av samma storlek $n \times n$ kan multipliceras med varandra i vilken som helst ordning: både AB och BA har mening. Men matriser kommuterar inte (som reella och komplexa tal): $AB \neq BA$.

Repetition av algebraiska regler för matrisprodukt (Lay Sats 2.1.2, sid. 115)

Låt A vara en $m \times n$ matris och matriser $\not B$ och C ha storlekar sådana att produkter och summor i formler som följer är väldefinierade.

$$
\begin{array}{rrcl}
a) & A(BC) & = & (AB)C \\
b) & A(B+C) & = & AB + AC \\
c) & (B+C)A & = & BA + CA \\
d) & r(AB) & = & (rA)B = A(rB) \\
e) & I_m A & = & A = AI_n
\end{array}
$$

där r är ett godtyckligt tal, och I_n är en kvadratisk $n \times n$ matris som har 1 på diagonalen och alla andra elementen lika med noll.

$\square$

En skillnad till mellan matriser och reella tal är att matrisekvationen

$$AB = I$$

behöver inte ha en lösning.

Definition

En $n \times n$ matris A är inverterbar (eller har invers) om det finns en matris C sådan att

$$AC = I; \qquad CA = I$$

där $I = I_n$ är enhetsmatrisen av storlem $n \times n$.

Entydigheten av inversa matrisen.

Inversa matrisen är entydig i fall den existerar. Om B är andra inversa matris till A, då gäller enkla beräknaingar:

$$B = BI = B(AC) = (AB)\,C = IC = C$$

och $C = B$.

Invera matrisen till A, betecknas med A^{-1} i fall den existerar.

$\square$

Definition.

En matris X sådan att den uppfyller ekvationen

$$AX = I$$

X kallas **höger invers** till matrisen A.

$\square$

Man definierar på liknande sätt begreppet **vänster invers** till matrisen A som matris Y sådan att

$$YA = I$$

Formeln för invera matrisen för 2×2 matriser. Sats 2.2.4, sid. 121 i Lay

Låt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Matrisen A är inverterbar om och endast om $\Longleftrightarrow ad - bc \neq 0$.

Definition

Uttrycket

$$ad - bc = \det(A)$$

är **determinanten** av 2×2 matris $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Matrisen A 2×2 är inverterbar om och endast om $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$.

$\square$

Bevis (Exercises 25, 26) (krävs inte på tentan)

Den formeln kan bevisas med direkt lösning av matrisekvationen för inversa matrisen C:

$$AC = I_2$$

Den matrisekvationen är ekvivalent med två vanliga vektorekvationer för första och andra kolonnen i inversa matrisen $C = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2]$:

$$\begin{aligned} A\mathbf{c}_1 &= \mathbf{e}_1 \\ A\mathbf{c}_2 &= \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

där $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är kolonnerna i enhetsmatrisen I_2. Dessa system har utvidgade matriser

$$\begin{bmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 1 \end{bmatrix}$$

och lösas med hjälp av Gauss elimination. Vi löser första systemet

$$\begin{bmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 0 & d - \frac{1}{a}bc & -\frac{1}{a}c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & b & 1 + \frac{1}{a}c\frac{ab}{(ad-bc)} \\ 0 & \frac{1}{a}(ad-bc) & -\frac{c}{a} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 1 + \frac{c}{a}\frac{ab}{(ad-bc)} \\ 0 & \frac{(ad-bc)}{a} & -\frac{1}{a}c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & 0 & 1 + \frac{bc}{(ad-bc)} \\ 0 & (ad-bc) & -c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & 0 & \frac{ad-bc+bc}{(ad-bc)} \\ 0 & (ad-bc) & -c \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} a & 0 & \frac{ad}{(ad-bc)} \\ 0 & (ad-bc) & -c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & 0 & \frac{ad}{(ad-bc)} \\ 0 & (ad-bc) & -c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{d}{(ad-bc)} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{(ad-bc)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_1 = \frac{1}{(ad-bc)}\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}$$

Andra systemet lösas med exakt samma steg i Gauss eliminationen förutom det att högerkolonnen i utvidgade matrisen är $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ i det fallet. Vi får lösningen på formen

$$\mathbf{c}_2 = \frac{1}{(ad-bc)}\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$$

och önskat resultat.

■

Exempel

Beräkna inversa matrisen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Lösning. $\det(A) = \det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot 6 - 5 \cdot 4 = 18 - 20 = -2 \neq 0$. Inversen existerar.

$A^{-1} = \frac{1}{(-2)}\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{bmatrix}$

■

Sats 2.2.5, sid. 122 i Lay.

Om A är en inverterbar matris av storelek $n \times n$ då måste ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha en entydig lösning för varje $\mathbf{b}$ ur $\mathbb{R}^n$ och

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Bevis. (krävävs inte på tentan)

Det är enkel övning på definitionen av inversa matrisen. Sätt uttrycket $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ in i uttrycket $A\mathbf{x}$:

$$A\left(A^{-1}\mathbf{b}\right) = \left(AA^{-1}\right)\mathbf{b} = I\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

som visar att $A^{-1}\mathbf{b}$ är en lösning. Om vi förutsätter att det finns en annan lösning $\mathbf{u}$, så att $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$, och multiplicerar den ekvationan med A^{-1} från vänster, så följer det att

$$\begin{aligned} A^{-1}A\mathbf{u} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ I\mathbf{u} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{u} &= A^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

alla andra lösningar måste vara lika med $A^{-1}\mathbf{b}$.

■

Användning av A^{-1} för att uttrycka lösningar till linjäta systemekvationer är lämpliga mest för att genomföra teoretiska analysitska beräkningar. Gausselimination är mycket mera effektiv för att lösa ett konkret system med ett högerled då antalet ekvationer $n > 3$.

En praktisk beräkning av inversa matrisen A^{-1}

Beräkningen av invera matrisen till en "stor" kvadratisk $n \times n$ matris kan genomföras på samma sätt som vi gjorde för en almän 2×2 matris i början.

Inversa matrisen $A^{-1} = X$, där $X = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n]$ måste uppfylla matrisekvationen

$$AX = I$$

Den matrisekvationen är enligt definitionen på matrisprodukten ekvivalent med n "vanliga" vektorekvationer eller linjära ekvationssystem

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1, \quad A\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2, ..., A\mathbf{x}_n = \mathbf{e}_n$$

där $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ...\mathbf{e}_n$, är kolonner från enhetsmatrisen I_n.

Betrakta motsvarande utvidgade matriser till dessa system:

$$[A, \mathbf{e}_1], [A, \mathbf{e}_2], ..., [A, \mathbf{e}_n],$$

I fall matrisen A har n pivotelement, kan dessa utvidgade matriser transformeras genom radoperationer i reducerade trappstegsmatriser

$$[I_n, \mathbf{x}_1], [I_n, \mathbf{x}_2], ..., [I_n, \mathbf{x}_n],$$

genom Gauss-radoperationer. Vektorer $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ där är kolonnvektorer i X.

Det är lätt att se att samma Gauss eliminationen och Jordan-Gauss tillbaka substitutionen kunde istället genomföras på matrisen $[A, I_n]$ stället. Som resultat v dessa radoperationer får man en matris där det står enhetsmatrisen i vänster och inversa matrisen X i höger:

$$[A, I_n] \xrightarrow{Gauss} [I_n, X]$$

□

Vi har fått metoden som låter för en given $n \times n$ matris A hitta en unique matris X sådan att den uppfyller ekvationen

$$AX = I$$

X är en entydig **höger invers** till matrisen A. Den är entydig eftersom matrisen A i den beräkningen är radekvivalent med enhetsmatrisen I_n.

□

Vi kommer att visa snart att en **unique höger invers** till A måste vara också vanlig invers, nämligen den måste satisfiera också ekvationen

$$XA = I$$

Metoden för att beräkna matrisinvers som är introducerad här, har en del lämpliga slutsatser.

Sats 2.2.7, s. 125. i Lay som krävs med bevis på tentan.

Matrisen A av storlek $n \times n$ är inverterbar om och endast om den är radekvivalent med enhetsmatrisen (identitetsmatrisen) av samma storlek.$\Box$

Bevis. Man kan lära beviset med hjälp av elementära matriser i Lay. Vi anger här en kortare bevis som inte använder begreppet elementära matriser.

Om A är radekvivalent med en enhetsmatris, så har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{p}$ en entydig lösning för vilket som helst högerled $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Följaktligen har matrisekvationen

$$AX = I$$

en entydig lösning, med kolonner i X som är entydiga lösningar till ekvationer $A\mathbf{x}_k = \mathbf{e}_k, k = 1, ...n$.

Matrisen X är då en **entydig högerinvers** till A.

Vi skall visa nu att detta medför att X i det fallet är även en vänsterinvers och vanlig invers till A.

Låt X vara en unique högerinver till en $n \times n$ matris A. Då måste X vara invers till A.

(den frågan betraktas på ett mera komplicerat sätt i Lay)

Betrakta en matris Y definierad som

$$Y = XA + X - I$$

och betrakta produkten AY :

$$\begin{aligned} AY &= A(XA + X - I) = (AX)A + AX - A = \\ &= IA + I - A = I \end{aligned}$$

Detta medför att

$$AY = I$$

Detta i sin tur medför att $Y = X$, eftersom X är en entydig lösning till matrisekvationen $AX = I$. Följaktligen

$$X = Y = XA + X - I$$

och det gäller då att

$$XA = I$$

d.v.s. X är en invers till A eftersom både $XA = I$ och $AX = I$ gäller.

Beviset åt motsatt håll är mycket lättare. Om matrisen A är inverterbar så har ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{p}$ en entydig lösning $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{p}$ för godtycklig högerled $\mathbf{p}$. Det är möjligt bara om matrisen A är radekvivalent med enhetsmatrisen I enligt tidigare utvecklad teori för linjära ekvationssystem.

$\blacksquare$

En del i satsen om inversamatrisen. Sats. 2.3.8, sid. 130 i Lay.

A är en iverterbar matris om och endast om ett av följande påståenden är sant.

Dessa påståenden är i sin tur ekvivalenta med varandra enligt tidigare teori för linjära ekvationssystem.

b) *A är radekvivalent med enhetsmatrisen I_n.*

c) *A har n pivotpositioner.*
d) *Ekvationen $Ax = 0$ har bara triviala lösningar.*
□
Exempel.
Bestäm om följande matris är inverterbar:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 9 \end{bmatrix} \underset{\sim}{Gauss} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{Gauss}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{Gauss} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$
Matrisen har tre pivot positioner och är inverterbar, kan dessutom radreduseras till enhetsmatrisen.
■

Satsen om beräkningar med inversa matriser. Sats 2.2.6, sid. 123 i Lay.

Låt A och B vara inverterbar matris $n \times n$. Följande tre algebraiska formler gäller
a)
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$
b) produkt AB av två inverterbara matriser A och B är också inverterbar matris och
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
□
Bevis till detta påstående kan krävas på tentan
c) A^T - transponatmatris av en inverterbar matris A är också inverterbar och
$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$
Bevis. till b) som kan krävas på tentan.
Beräkna produkt av AB med "mistänkta inversen" $B^{-1}A^{-1}$(visar att den är vänster invers)
$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}(I)B = B^{-1}B = I$$

Beräkna produkt av AB med "mistänkta inversen" $B^{-1}A^{-1}$ i motsatta ordningen (visa att den är höger invers):
$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = A(I)A^{-1} = AA^{-1} = I$$
■
Bevis. till c) som inte krävs på tentan men föreslås som exercise i Lay.

Kolla direkt att $\left(A^{-1}\right)^T$ är både vänster och höger invers till A^T

$$\begin{aligned}\left(A^{-1}\right)^T A^T &= \left(AA^{-1}\right)^T = I^T = I\\ A^T\left(A^{-1}\right)^T &= \left(A^{-1}A\right)^T = I^T = I\end{aligned}$$

■

Slutsats. (Väldigt lämplig sats senare!)

Kvardatiska matrisen A är inverterbar om och endast om A^T är inverterbar.

Den följer direkt från påståendet c) från föregående satsen.

□

Följande sats samlar flera kriterier om existensen av invers matris till en given matris A.

Sats. Inversamatrissatsen, Sats. 2.3.8, sid. 130 i Lay.

Låt A vara en $n \times n$ matris.

Följande påståenden är ekvivalenta (sanna eller falska samtidigt)

a) A **är en iverterbar matris.**

b) A är radekvivalent med enhetsmatrisen I_n.

c) A har n pivotpositioner.

d) Ekvationen $Ax = 0$ har bara triviala lösningar.

e) Kolonner i A är linjärt oberoende.

f) Linjära tramsformationen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ är injektion (one to one - in English)

g) Ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en lösning för varje $\mathbf{b}$ ur $\mathbb{R}^n$.

h) Kolonnerna ur A spänner hela $\mathbb{R}^n$.

i) Linjära tramsformationen $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ är surjektiv (on to - in English)

j) Det finns en $n \times n$ matris C sådan att $CA = I$.

k) Det finns en $n \times n$ matris B sådan att $AB = I$.

l) A^T är en inverterbar matris.

□

Korta kommentar till bevis. (krävs inte på tentan)

Observera först att metoden för beräkningen av inversa matrisen ovan, medför ekvivalensen av a) och b).

Det att matrisen A är kvadratisk av storlek $n \times n$, medför att b) och c) är ekvivalenta.

Egenskaper hos vektorekvationer och matrisekvationer medför att d) till h) är alla ekvivalenta med b).

Ekvivalensen av i) och h) är en del av tidigare satsen 1.9.12 om karakterisering av linjära avbildningar.

implikationer a) $\Longrightarrow$ j), a) $\Longrightarrow$ k), a) $\Longrightarrow$ k) är triviala.

Implikationer j) $\Longrightarrow$ g), k) $\Longrightarrow$ a) och l) $\Longrightarrow$ a) följer från satsen 2.2.6 om beräkningslegler för infersa matriser.

Vi anger här bevis till två av dessa implikationer eftersom de saknas i Lay (står som övningar och)

Bevis till j) $\Longrightarrow$ g)

Låt C vara en $n \times n$ matris C sådan att $CA = I$.

En lösning till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan framställas som $\mathbf{x} = C\mathbf{b}$ med att multiplicera ekvationen med C från vänster:

$CA\mathbf{x} = C\mathbf{b}$.

Om det skulle finnas en annan lösning $\mathbf{y}$ till samma ekvation: $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$, så framställes den med samma formeln:

$$\begin{aligned} CAx &= Cb = CAy \\ (CA)\,x &= (CA)\,y \\ x &= y \end{aligned}$$

Bevis till k) $\Longrightarrow$ a) och ett liknande påstående om vänster och höger inverser till kvadratiska matriser. (i en gul(grön?) ruta på sid. 130 i Lay)

I definitionen för inversa matrisen introducerades direkt en inversa matris C som uppfyller samtidigt två relationer med givna matrisen A (båda kvadratiska $n \times n$)

$$CA = I; \qquad AC = I$$

Det gäller följande påstående. Låt A och B vara kvadratiska $n \times n$ matriser sådana att

$$AB = I$$

Då har de båda en invers matris och $B^{-1} = A$ och $A^{-1} = B$.

Bevis

Vårt resonemang är baserat på tidigare bevisat egenskap att A och A^T är inverterbara bara samtidigt.

Betrakta transponat av ekvationen $AB = I$:

$$(AB)^T = I^T$$

Detta medför enligt regler för transponat av produkt att

$$B^T A^T = I^T = I.$$

Det betyder att B^T är vänster invers till A^T(!!!)

Observera här att vänsterinvers är mycket lämpligare än högerinvers. Det är lätt att se att vänsterinversen B^T till A^T måste samtidigt vara högerinvers till A^T eftersom ekvationen

$$A^T Q = I$$

för högerinvers Q löses genom vänstermultiplikation med B^T och har en lösning

$$\begin{aligned} Q &= B^T \\ A^T B^T &= I \end{aligned}$$

Så matrisen A^T är inverterbar och $\left(A^T\right)^{-1} = B^T$.

Men matrisen A som är transponat av A^T och måste också vara inverterbar, och $A^{-1} = B$ enligt satsen om beräkningsregler för inversa matriser.

Beviset åt motsatt håll är mycket lättare. Om matrisen A är inverterbar så har ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{p}$ en entydig lösning $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{p}$ för godtycklig högerled $\mathbf{p}$. Det är möjligt bara om matrisen A är radekvivalent med enhetsmatrisen I enligt tidigare utvecklad teori för linjära ekvationssystem.

■