

GRADIENT, DIVERGENCE OCH ROTATION

Om $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ så definieras gradienten genom

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Man kan tänka sig om linjär avbildning

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

som verkar på f .

Den kan verka även på ett vektorfält: om $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ så är

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Sats 16.1.1 Låt B_ϵ vara ett klott med radie ϵ och medelpunkt P och låt S_ϵ vara randen till B_ϵ . Då gäller enligt divergenssatsen (16.4.8):

$$\iiint_{B_\epsilon} \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS,$$

där $\hat{N}$ är utåtriktad enhetsnormal till sfären S_ϵ och alltså

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \iint_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS.$$

Ytintegralen kan ses som "flödet ut ur punkten P ", $\operatorname{div} \mathbf{F}(P)$ kan tolkas som "källstyrka per volymenhet".

Om $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ så definieras **rotation** $\operatorname{curl} \mathbf{F}$ enligt

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \times (F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Sats 16.1.2 Låt S vara en cirkelskiva med radie ϵ och centrum i punkten P och enhets normalvektor $\hat{\mathbf{N}}$. Låt C vara randcirkeln genomlöst moturssett från spetsen av $\hat{\mathbf{N}}$. Då gäller enligt Stokes sats (16.5.10)

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \hat{N} dS \approx (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} \pi \epsilon^2$$

och alltså

$$\operatorname{curl} \mathbf{F}(P) \cdot \hat{\mathbf{N}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Kurvintegralen kan tolkas som arbetet vektorfältet $\mathbf{F}$ uträttar då en partikel går runt i den cirkulära banan.

$\text{curl}\mathbf{F}(P) \cdot \hat{\mathbf{N}}$ kan alltså ses som fältets förmåga att få en partikel att rotera kring axeln $\hat{\mathbf{N}}$, förmågan är störst om $\hat{\mathbf{N}}$ är parallell med $\text{curl}\mathbf{F}(P)$ och obefintlig om de är ortogonala.

Ett vektorfält $\mathbf{F}$ kallas **källfritt**, divergensfritt ("solenoidal") i ett område D om $\text{div}\mathbf{F} = 0$ i D .

Ett vektorfält kallas **rotationsfritt** ("irrotational") i ett område D om $\text{curl}\mathbf{F} = 0$ i D .

Sats 16.2.3 Låt $\mathbf{F}$ vara ett vektorfält och ϕ en reellvärd funktion som är tillräckligt glatta. Då gäller

(g) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ ($\text{div curl} = 0$)

(h) $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$.

(g) innebär att $\text{curl}\mathbf{F}$ är källfritt. (h) betyder att om $\mathbf{F}$ är konservativt så är $\mathbf{F}$ rotationsfritt.

Låt D vara ett öppet område i planet eller rummet. D kallas **sammanhängande** om varje par av punkter P och Q i D kan bindas samman med en kontinuerlig kurva som ligger helt i D .

Ett område D kallas **enkelt sammanhängande** om varje enkel sluten kurva kan kontinuerligt dras samman till en punkt utan att lämna D under sammandragningen.

Sats 16.2.4 Om $\mathbf{F}$ är glatt rotationsfritt vektorfält i ett **enkelt sammanhängande område** D så är $\mathbf{F}$ konservativt.

Vi har alltså att ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ i planet är konservativt i ett enkelt sammanhängande område D om och endast om

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

i alla punkter $(x, y) \in D$,

ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ i rummet är konservativt i ett enkelt sammanhängande område D om och endast om

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) & = & \frac{\partial}{\partial x} g(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) & = & \frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} g(x, y, z) & = & \frac{\partial}{\partial y} h(x, y, z) \end{array} \right.$$

i alla punkter $(x, y, z) \in D$.