

1 (13.3) Bestäm kritiska punkter (a, b, λ) till Lagranges funktion

$$L(x, y, \lambda) = x^3 y^5 + \lambda(x + y - 8)$$

Då uppfyller (a, b) systemet

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(a, b) \\ \frac{\partial L}{\partial y}(a, b) \end{cases} = 0 \quad (*)$$

$$g(a, b) = 0$$

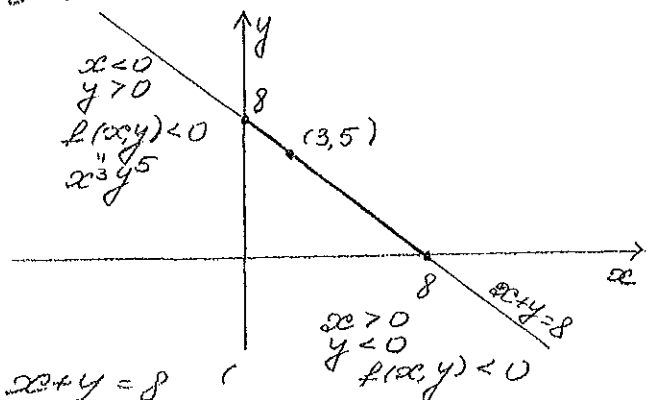
(se föreläsningens anteckningar)

De samtliga lösningarna till (*) ges av $(0, 8)$, $(8, 0)$ och $(3, 5)$. Dessa är kandidater för maximipunkten.

Eftersom $f(3, 5) = 3^3 5^5 > f(8, 0) = f(0, 8) = 0$ så blir $f(3, 5)$ det största värdet av f på

den delen av kurvan som ligger i I:a kvadranten.

(Obs! f är kontinuerlig på det begränsade slutet området).



Eftersom funktionen f är negativ på resten av linjen $x+y=8$ så blir $f(3, 5) = 3^3 5^5$ det största värdet av f på hela linjen. Obs! minsta värde saknas!

Svar: $3^3 5^5$

7 (13.3) Minimera $f(a, b, c) = \frac{4\pi abc}{3}$ under

bivillkoret $\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$ ($(1, 2, 1)$ ligger på ytan $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$)

För detta bestäm först kritiska punkter (a, b, c, λ) , $a, b, c > 0$ för Lagranges funktion

$$L(a, b, c, \lambda) = \frac{4\pi abc}{3} + \lambda\left(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{1}{c^2} - 1\right)$$

Argumentera varför (a, b, c) som du får är en minimipunkt.

9 (13.3) Se exempel 4, s. 762

14 (13.3) Lagranges funktion är

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z^2 - x^2 - y^2) + \mu(x - 2z - 3)$$

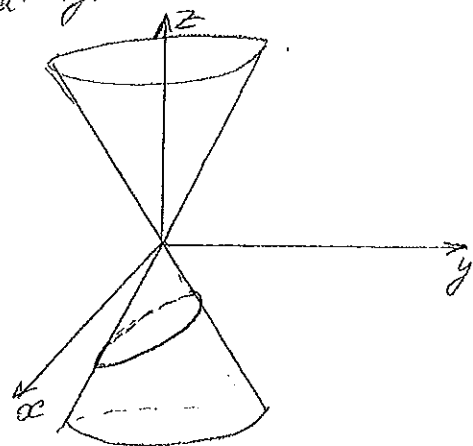
Att (a, b, c, λ, μ) är en kritisk punkt till L
medför att (a, b, c) är en lösning till systemet

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) \\ \nabla g_1(x, y, z) \\ \nabla g_2(x, y, z) \end{cases} = 0$$
$$\begin{cases} z^2 - x^2 - y^2 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

där $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
 $g_1(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$
 $g_2(x, y, z) = x - 2z - 3$

Se föreläsningssanteckningar.

Min, max existerar,
ty skärningen är en ellips
som är ett begränsat
slutet område



13 (14.1) Se exempel 2, s. 811

14 (14.1) Se exempel 3, s. 811-812

5, 7 (14.2) Om R är en rektangel, $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$
så är $\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$

11 (14.2) Skissa området!

Beräkna skärningspunkter mellan
linjen $y = \frac{5-2x}{2}$ och hyperbeln $y = \frac{1}{x}$.

Skriv integreringsområdet som
ett y -enkelt område

15 (14.2) Skissa integreringsområdet!

Kasta om integreringsordningen genom
att se på integreringsområdet som ett
 x -enkelt.

1, 3, 7, 9 (14.4) Använd polära koordinater.
Glöm inte Jacobianen r .

32 (14.4) Använd variabelbyten: $u = x+y$
 $v = 3x+4y$

$$\text{Då } \begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ 5 \leq v \leq 6 \end{cases}$$

3 (14.5) Utnyttja symmetriargumenter för att visa
att $\iiint_D xy \, dV = 0$

1 (14.6) Skissa området!
(Se ett exempel från föreläsning)

ytorna skär varandra längs kurvan γ som ges av.

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 - x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2} \\ z = \frac{a}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Projektion av området
på xy -planet blir då

$$E: x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Vidare } V = \iiint_K dV = \iint_E \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz \right) dx dy.$$

12 (14.6) Använd sfäriska koordinater. Glöm ej
Jacobianen $R^2 \sin \varphi$.

$$\text{Svar: } \frac{4\pi a^5}{5}$$

Svar till extra uppgift 1: $\min = 2$
 $\max = 3$

Svar till extra uppgift 2: $\frac{4}{3}\pi$

