

Övningshjälp, Läsvecka 6

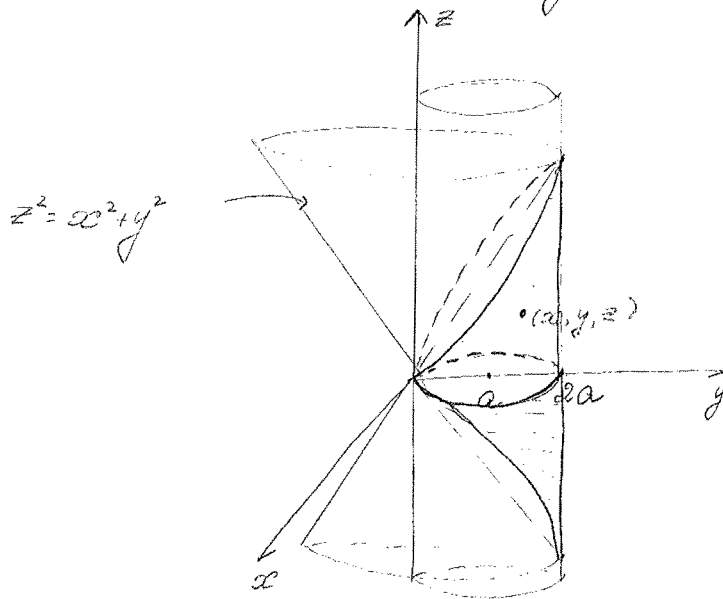
9(15.5) 1. Parametrisera och skissa ytan.

Observera först att $x^2 + y^2 = 2ay \Leftrightarrow$

$$x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = a^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + (y-a)^2 = a^2$$

Ekvationen beskriver en cylinder som har cirkeln $x^2 + (y-a)^2 = a^2$ i basen



Arean = 2 (arean av den delen av ytan som ligger ovanför xy -planet ($z \geq 0$!))

Parametrisering: x, y kan parametriseras enligt

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y - a = a \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t + a \end{cases}$$

$t \in [0, 2\pi]$

Parametrisering av ytan blir

$$r = r(t, z) = (x(t), y(t), z)$$

$$\text{där } 0 \leq z \leq \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

$$= \sqrt{(a \cos t)^2 + (a \sin t + a)^2}$$

(Obs! Punkter som ligger utanför konen $z^2 = x^2 + y^2$ och ovanför xy -planet har koordinat (x, y, z) s.a

$$0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2})$$

2. Använd formeln: $\text{Arean} = \iint_E \|r'_t \times r'_z\| dt dz$

där E ges av

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$0 \leq z \leq \sqrt{(a \cos t)^2 + (a \sin t + a)^2}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + 2a^2 \sin t + a^2} \\ &= \sqrt{2a^2 + 2a^2 \sin t} \\ &= \sqrt{2} a \sqrt{1 + \sin t} \end{aligned}$$

3 (15.6)

③ Parametrisera varje sidan av rektangeln

Baksidan: $r(y, z) = (0, y, z)$
 $0 \leq y \leq b$
 $0 \leq z \leq c$

Framsida: $r(y, z) = (a, y, z)$
 $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$

Bottensidan:
 $r(x, y) = (x, y, 0)$
 $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$

OSV

② Bestäm flödet ut ur varje sida.

Baksidan: $r(y, z) = (0, y, z)$
 $\hat{N} = (-1, 0, 0)$ - enhetsnormalvektor
 som pekar utåt ytan

$$\text{Flödet} = \iint_{\text{Baksidan}} \mathbf{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iint_{\text{Baksidan}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (-1)\mathbf{i} \, dS =$$

$$= \iint_{\text{Baksidan}} (-x) \, dS = \iint_{\text{Baksidan}} 0 \, dS = 0$$

(x koordinat för punkter på baksidan = 0)

Framsida: $\hat{N} = (1, 0, 0)$ - enhetsnormalvektor
 som pekar utåt ytan

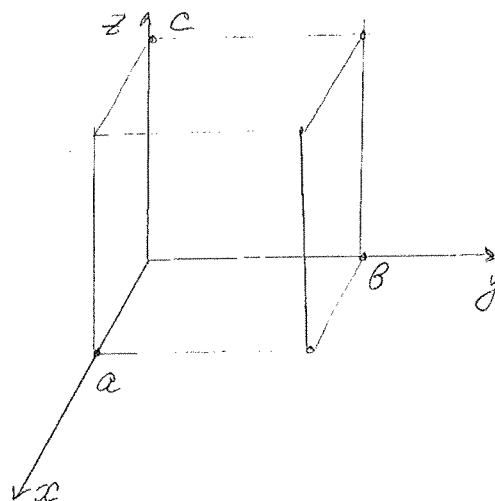
$$\text{Flödet} = \iint_{\text{framsidan}} \mathbf{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iint_{\text{framsidan}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} \, dS$$

$$= \iint_{\text{framsidan}} x \, dS = \iint_{\text{framsidan}} a \, dS$$

(ty $x = a$ för alla punkter på framsidan)

$$= a(\text{arean av framsidan}) = a \cdot ac = a^2c$$

OSV



7(15.6)

Ytan $z = 4 - x^2 - y^2$ kan parametriseras enligt $r(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$
 För den delen som ligger ovanför planet $z = 2x + 1$
 har man $2x + 1 \leq 4 - x^2 - y^2$
 som skrivs om till

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 \leq 4$$

$$r'_x = (1, 0, -2x), \quad r'_y = (0, 1, -2y) \quad \text{och}$$

$$r'_x \times r'_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = 2xy i + 2y j + k$$

↑
en normal till ytan
som pekar utåt

$$\text{Flödet} = \iint_{(x+1)^2 + y^2 \leq 4} F(r(x, y)) \cdot (-1) r'_x \times r'_y \, dx \, dy$$

2(16.3) Svar: $-\frac{4}{3}$

Använd Greens formel.

Obs! kurvan orienterad medurs!
 Dubbelintegralen kan beräknas genom att
 se på området som x -enkelt.

3(16.3) Använd Greens formel.

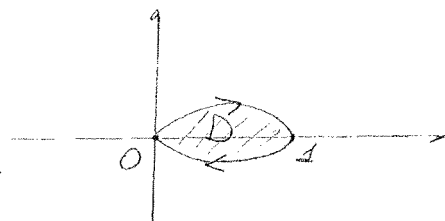
$$5(16.3) \text{ Arean} = \frac{1}{2} \oint_C (-y i + x j) \cdot dr$$

Bra att veta: $\sin t \cdot \cos t = \frac{\sin 2t}{2}$
 $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$

Extra uppgifter: 1

$$\text{Arean av } D = \oint_C x \, dy \quad \text{eller} \quad \oint_C (-y) \, dx$$

$$\text{eller} \quad \frac{1}{2} \oint_C -y \, dx + x \, dy$$



Svar: $\frac{8}{15}$

