Tentamen
TMV036c/MVE350 Analys och Linjär algebra K/Kf/Bt/Ki

2015-03-19 14.00 - 18.00

Examinator: Lyudmila T, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Tim Cardilin, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs antingen minst 23 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt. Bonuspoäng från duggor 2015 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (11p)

2. (a) Beräkna dubbelintegralen (3p)

$$\iint_D xy^2 dA$$

där D är det område som avgränsas av x-axeln och de två kurvorna $y = x^2$ och $y = 2 - x$ för $x \geq 0$.

(b) Beräkna trippelintegralen (2p)

$$\iiint_K (x + ye^z) dV$$

där K är ett rätblock som ges av $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $1 \leq z \leq 2$.

3. Matrisen

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

har egenvektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

(a) Är A diagonaliserbar? (Motivera väl). Bestäm i så fall P och D sådana att $A = PDP^{-1}$. (3p)

(b) Undersök vad som händer med A^n då $n \to \infty$. Det kan underlätta räkningarna att observera att A är symmetrisk och dra de rätta slutsatserna av detta. (2p)

4. Låt $f(x, y) = 3 + x - x^2 - y^2$. Bestäm största och minsta värdena för $f(x, y)$ i området $x \leq y \leq \sqrt{x}$. (5p)

5. (a) Vad menas att ett vektorfält är konservativt? (1p)

(b) Låt $\boldsymbol{F}(x, y) = (2xy - 3)\boldsymbol{i} + (x^2 + \cos y)\boldsymbol{j}$. Visa att $\boldsymbol{F}$ är konservativt. Beräkna det arbete som $\boldsymbol{F}$ uträttar för att förflyta en partikel rätlinjigt från $(0, 0)$ till $(2, 1)$. (5p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Bestäm de punkter på skärningskurvan mellan konen $z^2 = x^2 + y^2$ och planet $z = x + y + 2$ som ligger närmast origo. Bestäm också de som ligger längst från origo. (6p)

7. Låt $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$. Beräkna flödet av $\boldsymbol{F}$ ut ur området $z \leq 4 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$. (Tips: Symmetriargumenter kan hjälpa vid beräkningen av en dubbelintegral). (6p)

8. (a) Bevisa följande Pythagoras sats: Om $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ är parvis ortogonala vektorer i $\mathbb{R}^m$ så (3p)

$$||\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \ldots + \boldsymbol{u}_n||^2 = ||\boldsymbol{u}_1||^2 + ||\boldsymbol{u}_2||^2 + \ldots + ||\boldsymbol{u}_n||^2.$$

Det blir poängavdrag om du skriver ner beviset bara i fall $n = 2$.

(b) Antag att $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ är en ortonormerad mängd av vektorer i $\mathbb{R}^m$. Visa att om $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$ så är (3p)

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}_1)^2 + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}_2)^2 + \ldots + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}_n)^2 \leq ||\boldsymbol{a}||^2.$$

Motivera väl.

Lycka till!
Lyudmila T

Anonym kod	TMV036c/MVE350 Analys och Linjär algebra K/Kf/Bt/Ki	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt $f(x, y) = 2x + y + e^{y^2-x^2}$. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i $(0, 0, 1)$. Bestäm även ett aproximativt värde $f(-0.02, 0.01)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm längden av kurvan med parametriseringen $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \ln t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}$, $1 \leq t \leq 2$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Betrakta de tre punkterna $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$. Bestäm den räta linje som i minsta kvadratmetodens mening bäst anpassar till de tre punkterna. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna divergensen och rotationen för vektorfältet $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + yz^2\boldsymbol{k}$. Är vektorfältet källfritt och/eller virvelfritt i $\mathbb{R}^3$? (2p)

Lösning:

Svar: ....