Tentamen
TMV036c/MVE350 Analys och Linjär algebra K/Kf/Bt/Ki

2015-04-17 14.00 - 18.00

Examinator: Lyudmila T, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Lyudmila Turowska, telefon: 0738 371 135

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs antingen minst 23 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt. Bonuspoäng från duggor 2015 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (11p)

2. Bestäm de största och minsta värdena som antas av $f(x,y) = x^3 - xy + y^2$ i enhetskvadraten dvs i området $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. (5p)

3. (a) Vad menas med en ortogonalbas till ett underrum? (1p)

(b) Verifiera att vektorerna $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T$, $\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ är en ortogonal bas till det underrum H som spänns upp av $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$. (1p)

(c) Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ på H samt avståndet från $\boldsymbol{x}$ till H. (3p)

4. (a) Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytan $z = x^2 + y^2$, yz-planet och planet $z = 2$. (3p)

(b) Betrakta den plana ytbit S som parametriseras av $\boldsymbol{r}(u,v) = u\boldsymbol{i} + (u+v)\boldsymbol{j} + (u-v)\boldsymbol{k}$, $0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq u$. Beräkna arean av S. (3p)

5. Beräkna $\oint_C y^2dx + xdy$ över randen C med moturs orientering till övre halvan av enhetscirkelnskivan, dvs $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$, genom att (5p)

(a) parametrisera randen och räkna ut kurvintegralen;

(b) använda Greens formel.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Bestäm $\iint_D (x+y)dxdy$, där D är parallellogramet som begränsas av fyra linjerna $x+y=1$, $x+y=2$, $3x-y=2$, $3x-y=4$. (6p)

7. Låt $\boldsymbol{F}(x,y,z) = y^5\boldsymbol{i}+x^3\boldsymbol{j}+z^4\boldsymbol{k}$ och ytan S är den del av $z=x^2+y^2$ som ligger under planet $z=1$. Beräkna $curl\boldsymbol{F}$ och flödet av $curl\boldsymbol{F}$ ut genom S. Beräkna också kurvintegralen $\oint_{\partial S} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$, där ∂S är den slutna randen till S, orienterad medurs sett uppifrån. Dessa två värden skall vara lika enligt Stokes sats. Fick Du detta? (6p)

Bra att veta: $2\cos^2\theta = 1+\cos(\theta)$ och $2\sin^2\theta = 1-\cos(2\theta)$.

8. (a) En 3×3 matris A har följande egenvärden och motsvarande egenvektorer: (3p)

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4 \text{ och } \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm alla egenvärden och respektive egenvektorer till matrisen $B = XAX^{-1}$, där $X = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$. Motivera väl. Obs! Du behöver inte bestämma själva matrisen B.

(b) Bevisa att egenvektorer $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ tillhörande olika egenvärden till en kvadratisk matris A inte kan vara parallella, dvs $\boldsymbol{v}_1 = \mu\boldsymbol{v}_2$, eller $\boldsymbol{v}_2 = \mu\boldsymbol{v}_1$ för något tal μ. Motivera väl. Du får inte endast hänvisa till någon sats från kursen, Du skall bevisa påståendet. (3p)

Lycka till!
Lyudmila T

Anonym kod	TMV036c/MVE350 Analys och Linjär algebra K/Kf/Bt/Ki	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - y^4$. Bestäm en ekvation för normallinjen till nivåkurvan $f(x, y) = 3$ i punkten $(1, 1)$. I vilken riktning avtar f snabbast i punkten $(1, 1)$? (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Antag att $f(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator av ordning två. Uttryck $\frac{d}{ds}f(x, y)$ och $\frac{d^2}{ds^2}f(x, y)$ i termer av de partiella derivatorna till $f(x, y)$, där $x = e^s$, $y = s^2$. . (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Låt A vara en 2×2-matris för vilken vektorerena $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ är egenvektorer med respektive egenvärden -1 och 2. Bestäm samtliga lösningar till systemet av differentiella ekvationer $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$. Skissa lösningarnas trajektorier. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Vektorerna $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ spänner upp ett plan i $\mathbb{R}^3$ Bestäm en ortonormerad bas för detta plan. (2p)

Lösning:

Svar: ....