

GRÄNSVÄRDE

Låt P vara en punkt i $\mathbb{R}^n$, $r > 0$. Med en **omgivning** $B_r(P)$ till P menas mängden av alla punkter Q vars avstånd till P är mindre än r . P kallas en **inre punkt** i en delmängd A av $\mathbb{R}^n$ om det finns en omgivning till P som helt ligger i A . P är en **randpunkt** om varje omgivning till P råkar A och komplementet till A .

Det **inre** av en mängd består av alla inre punkter i mängden

Randen av en mängd består av alla randpunkter till mängden

En mängd kallas **öppen** om ingen randpunkt tillhör mängden

En mängd kallas **sluten** om alla randpunkter tillhör mängden.

Def. Låt f vara en reellvärd funktion av två variabler med definitionsmängd $D(f)$. Vi säger att

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

om

- varje omgivning till (a,b) innehåller punkter i $D(f)$ andra än (a,b) ;
- till varje positivt $\epsilon > 0$ finns ett positivt tal $\delta = \delta(\epsilon)$ sådant att $|f(x,y) - L| < \epsilon$ gäller för alla punkter $(x,y) \in D(f) \cap B_\delta(a,b)$.

Räkneregler för gränsvärden

För att underlätta formuleringarna utgår vi att alla inblandade funktioner har samma definitionsmängd.

Om $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ och $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = M$ så gäller

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f(x,y) + g(x,y)) = L + M$;
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f(x,y)g(x,y)) = LM$;
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f(x,y)/g(x,y)) = L/M$ om $M \neq 0$;
4. (**Instängningsregeln**) Om $f(x,y) \leq h(x,y) \leq g(x,y)$ och $L = M$ så $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(x,y) = L$

(**Sammanställningsregeln**) Om $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(D(f)) \subset D(g)$ och $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$, $\lim_{z \rightarrow L} g(z) = M$ så

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(f(x,y)) = M.$$

Kontinuitet

En funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig i (a,b) om $(a,b) \in D(f)$ och $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

Vi säger att f är kontinuerlig om f är kontinuerlig i varje punkt i definitionsmängden $D(f)$.

Det följer ur definition och gränsvärderäkneregler att om f, g är kontinuerliga i (a,b) så är cf ($c \in \mathbb{R}$), $f + g$, fg , f/g (om $g(a,b) \neq 0$), $h \circ g$ om $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig i $g(a,b)$.
