

GRADIENT OCH RIKTNINGSDERIVATA

Gradient till en funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ som har partiella derivator är

$$\nabla f(x, y) = \text{grad} f(x, y) = f_1(x, y)\mathbf{i} + f_2(x, y)\mathbf{j}.$$

Sats 12.7.6 Om f är differentierbar i punkten (a, b) och $\nabla f(a, b) \neq 0$ så är $\nabla f(a, b)$ en normalvektor till nivåkurvan genom punkten (a, b) alltså till $f(x, y) = f(a, b)$.

Riktningssderivatan till $f(x, y)$ i punkten (a, b) i riktningen $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$, där $\|\mathbf{u}\| = 1$ är gränsvärdet

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = f'_{\mathbf{u}}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hu, b + hv) - f(a, b)}{h}.$$

Observera att $f'_{\mathbf{u}} = f'_x$ om $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ och $f'_{\mathbf{u}} = f'_y$ om $\mathbf{u} = \mathbf{j}$
 $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ är tillväxthastigheten i riktningen $\mathbf{u}$,

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \frac{d}{dt}f(a + tu, b + tv)|_{t=0}.$$

Sats 12.7.7 Om f är differentierbar och $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ är en given riktning med $\|\mathbf{u}\| = 1$ så är

$$f'_{\mathbf{u}}(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u}.$$

Notera att $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \|\mathbf{u}\| \|\nabla f(a, b)\| \cos \theta$, där θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\nabla f(a, b)$. Då gäller

- I punkten (a, b) växer f snabbast i riktningen som ges av $\nabla f(a, b)$ (då $\cos \theta = 1$). Den maximala tillväxten är $\|\nabla f(a, b)\|$.
- I punkten (a, b) avtar f snabbast i riktningen som ges av $-\nabla f(a, b)$ (då $\cos \theta = -1$). Den maximala nedgångshastighet är $\|\nabla f(a, b)\|$.
- Tillväxthastigheten i punkten (a, b) är 0 i riktningar parallella med nivåkurvan $f(x, y) = f(a, b)$ ($\cos \theta = 0$).

TAYLORS UTVECKLING OCH APPROXIMATION

Taylor's formel av andra ordningen i två variabler:

Låt $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en C^3 -funktion i den öppna mängden D och $(a, b) \in D$. Då är

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + f_1(a, b)h + f_2(a, b)k + \frac{1}{2}(f_{11}(a, b)h^2 + 2f_{12}(a, b)hk + f_{22}(a, b)k^2) + (h^2 + k^2)^{3/2}\rho(h, k)$$

där $\rho(h, k)$ är en begränsad funktion i en omgivning $(0, 0)$.

Termen $(h^2 + k^2)^{3/2}\rho(h, k)$ skrivs ofta som $O(\|(h, k)\|^3)$. (Obs! $\|(h, k)\| = \sqrt{h^2 + k^2}$).

För funktioner i C^3 av ett godtyckligt antal variabler $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ blir Taylor's utveckling

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^n f_j(\mathbf{a})h_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n f_{jk}(\mathbf{a})h_jh_k + \|\mathbf{h}\|^3\rho(\mathbf{h}),$$

där $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ är en inre punkt i $D(f)$, $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ och ρ är en begränsad funktion i en omgivning av origo.