

1(a) En normalvektor till ytan $z = f(x, y)$ i $(1, 1, 4)$ ges av $\mathbf{n} = (f'_x(1, 1), f'_y(1, 1), -1)$.

$$f'_x(x, y) = 2x + 4xy \quad \text{och} \quad f'_x(1, 1) = 6$$

$$f'_y(x, y) = 2x^2 + 4y^3 \quad \text{och} \quad f'_y(1, 1) = 6$$

Vi har alltså $\mathbf{n} = (6, 6, -1)$

Riktningsderivatan av f i $(1, 1)$ och i riktningen

$$\mathbf{u} = \frac{1}{5}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \quad \text{är}$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(1, 1) &= \nabla f(1, 1) \cdot \mathbf{u} = (f'_x(1, 1)\mathbf{i} + f'_y(1, 1)\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}\right) \\ &= 6 \cdot \frac{3}{5} + 6 \cdot \frac{4}{5} = \frac{42}{5} \end{aligned}$$

1(b) C parametriseras enligt

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x) = (x, \sqrt{x^3}, \sqrt{3}x)$$

För den del av C som ligger mellan origo och $(1, 1, \sqrt{3})$, varierar x inom intervallet $[0, 1]$

$$\text{Längden} = \int_0^1 \|\mathbf{r}'(x)\| dx = \int_0^1 \left\| \mathbf{i} + \frac{3}{2}\sqrt{x}\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k} \right\| dx =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x + 3} dx = \frac{4}{9} \left(4 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{61}{27}$$

1(c) $\nabla f(x, y) = (6x + 2y + 2, 2x + 2y + 1)$. Man ser lätt att $\nabla f(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) = 0$ och därmed blir $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ en kritisk punkt till $f(x, y)$.

$$\text{Vidare,} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(6x + 2y + 2) = 6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(6x + 2y + 2) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 2y + 1) = 2$$

och i punkten $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ blir Hessianen

$$\mathcal{H}(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Eftersom} \quad \det \mathcal{H}(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) = 12 - 4 > 0$$

$$\text{och} \quad f_{31}(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) = 6 > 0$$

är $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ en lokal minimipunkt.

1d)

Jacobimatrisen ges av

$$Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x + e^z + y) & \frac{\partial}{\partial y}(x + e^z + y) & \frac{\partial}{\partial z}(x + e^z + y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(yx^2) & \frac{\partial}{\partial y}(yx^2) & \frac{\partial}{\partial z}(yx^2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & e^z \\ 2xy & x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

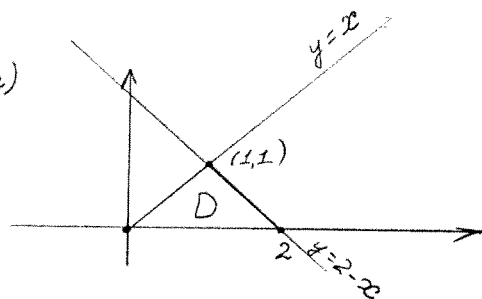
och i $(1, 2, 0)$ blir den

$$Df(1, 2, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(1.1, 1.9, 0.2) \approx f(1, 2, 0) + Df(1, 2, 0) \begin{bmatrix} 1.1 - 1 \\ 1.9 - 2 \\ 0.2 - 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 2.3 \end{bmatrix}$$

2(a)

D är ett x -enkelt område:

$$0 \leq y \leq 1, \quad y \leq x \leq 2-y$$

Därför blir

$$\iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} (x^2 + y^2) dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=y}^{x=2-y} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(2-y)^3}{3} + y^2(2-y) - \frac{y^3}{3} - y^3 \right) dy = \frac{4}{3}$$

2(b) Kroppen K består av punkterna (x, y, z) s. a.

$$8 - x^2 + y^2 \geq z \geq x^2 + 3y^2$$

Speciellt gäller att $8 - x^2 + y^2 \geq x^2 + 3y^2$ dvs $2x^2 + 2y^2 \leq 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$.

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + 3y^2 \leq z \leq 8 - x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

och

$$\text{volymen} = \iiint_K 1 dV = \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} \left(\int_{x^2 + 3y^2}^{8 - x^2 + y^2} 1 dz \right) dx dy = \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} (8 - x^2 + y^2 - x^2 - 3y^2) dx dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (8-2x^2-2y^2) dx dy = \left| \begin{array}{l} \text{Polära koord.} \\ x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right| = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (8-2r^2) r d\varphi \right) dr =$$

$$= \int_0^2 2\pi \cdot 2(4r-r^3) dr = 16\pi$$

3. (a) Kritiska punkter är lösningar till systemet.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4-2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -4-2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Svar: (2, -2).

(b) Eftersom f är kontinuerlig och cirkeln $x^2+y^2=2$ är ett begränsat slutet område har f både maximum och minimum på cirkeln som kan beräknas t.ex. med Lagranges multiplikatormetod:

Låt $L(x, y, \lambda) = 4x - 4y - x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$.
Vi skall bestämma kritiska punkter till L :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 4 - 2x + \lambda \cdot 2x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -4 - 2y + \lambda \cdot 2y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x & 2y \\ 4-2x & -4-2y \end{cases} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x(-4-2y) - 2y(4-2x) = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -y \\ 2y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$f(-1, 1) = -10, \quad f(1, -1) = 6$$

och därmed $\max f$ på cirkeln = 6
 $\min f$ på cirkeln = -10.

(c) Den kritiska punkten ligger ej i området $\Rightarrow \max f = 6$
 $\min f = -10$.

4 (a) Se kursboken

$$(b) \operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin(y-z) & y + x \cos(y-z) & -x \cos(y-z) \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} (-x \cos(y-z)) - \frac{\partial}{\partial z} (y + x \cos(y-z)) \right)$$

$$-j \left(\frac{\partial}{\partial x} (-x \cos(y-z)) - \frac{\partial}{\partial z} (\sin(y-z)) \right) + k \left(\frac{\partial}{\partial x} (y + x \cos(y-z)) - \frac{\partial}{\partial y} (\sin(y-z)) \right) = i (x \sin(y-z) - x \sin(y-z)) -$$

$$-j (-\cos(y-z) + \cos(y-z)) + k (\cos(y-z) - \cos(y-z)) = 0$$

(c) Eftersom $\mathbb{R}^2$ är enkelt sammanhängande område och $\text{curl } F = 0$ i $\mathbb{R}^2$, så är F konservativt i $\mathbb{R}^2$ och arbetet som F uträttar för att förflytta en partikel från $(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ till $(2\pi, \frac{\pi}{2}, 0)$ är oberoende av vägen.

Därför blir det sökande arbetet

$$\int_{f_1} F \cdot dr + \int_{f_2} F \cdot dr$$

där f_1 är rätlinjestycket från $(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ till $(2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ med parametriseringen

$$r_1 = r_1(t) = (t, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad t \in [\pi, 2\pi]$$

f_2 är rätlinjestycket från $(2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ till $(2\pi, \frac{\pi}{2}, 0)$ med parametriseringen av $-f_2$

$$r_2 = r_2(t) = (2\pi, \frac{\pi}{2}, t), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{Vi har } \int_{f_1} F \cdot dr = \int_{\pi}^{2\pi} F(t, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cdot r_1'(t) dt =$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} F(t, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cdot (i + 0j + 0k) dt = \int_{\pi}^{2\pi} \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) dt = 0$$

$$\int_{f_2} F \cdot dr = - \int_{f_2} F \cdot dr = - \int_0^{\pi/2} F(2\pi, \frac{\pi}{2}, t) \cdot r_2'(t) dt =$$

$$= - \int_0^{\pi/2} F(2\pi, \frac{\pi}{2}, t) \cdot (0i + 0j + k) dt = - \int_0^{\pi/2} -2\pi \cos(\frac{\pi}{2} - t) dt$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin t dt = 2\pi$$

Det sökande arbetet är alltså 2π .

Alternativt kan man beräkna en potential Φ till F . Arbetet blir då $\Phi(2\pi, \frac{\pi}{2}, 0) - \Phi(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Φ bestäms ur systemet:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \sin(y-z) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = y + x \cos(y-z) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -x \cos(y-z) \end{cases}$$

Ur 1^a ekvationen fås $\Phi(x, y, z) = x \sin(y-z) + C(y, z)$

Sätt in uttrycket för Φ i 2^a ekvationen:

$$\frac{\partial}{\partial y} (x \sin(y-z) + C(y, z)) = y + x \cos(y-z)$$

$$\Leftrightarrow x \cos(y-z) + \frac{\partial}{\partial y} C(y, z) = y + x \cos(y-z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y} C(y, z) = y \quad \text{varav} \quad C(y, z) = \frac{y^2}{2} + D(z)$$

$$\text{och } \Phi(x, y, z) = x \sin(y-z) + \frac{y^2}{2} + D(z)$$

Sätt in detta i 3^e ekvationen:

$$\frac{\partial}{\partial z} (x \sin(y-z) + \frac{y^2}{2} + D(z)) = -x \cos(y-z)$$

$$\Leftrightarrow -x \cos(y-z) + D'(z) = -x \cos(y-z)$$

$$D'(z) = 0 \quad \text{varav} \quad D(z) = \text{konst}$$

En potential Φ blir alltså

$$\Phi(x, y, z) = x \sin(y-z) + \frac{y^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Arbetet} &= \Phi(2\pi, \frac{\pi}{2}, 0) - \Phi(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 2\pi \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \\ &\quad - \pi \sin 0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 2\pi. \end{aligned}$$

5(a) Kan S parametriseras m h a sfäriska koordinater

enligt
$$\begin{cases} x = \sqrt{3} \sin \varphi \cos \theta \\ y = \sqrt{3} \sin \varphi \sin \theta \\ z = \sqrt{3} \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} &\leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$r = r(\varphi, \theta) = (\sqrt{3} \sin \varphi \cos \theta, \sqrt{3} \sin \varphi \sin \theta, \sqrt{3} \cos \varphi)$$

(b) Med parametriseringen i (a) fås

$$\begin{aligned} \iint_S z \, dS &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3} \cos \varphi \parallel r'_\varphi \times r'_\theta \parallel d\theta \right) d\varphi = \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3} \cos \varphi \left\| \begin{pmatrix} \sqrt{3} \cos \varphi \cos \theta & \sqrt{3} \cos \varphi \sin \theta & -\sqrt{3} \sin \varphi \\ -\sqrt{3} \sin \varphi \sin \theta & \sqrt{3} \sin \varphi \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \right\| d\theta \right) d\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3} \cos \varphi \parallel 3 \sin^2 \varphi \cos \theta \, i + 3 \sin^2 \varphi \sin \theta \, j + 3 \cos \varphi \sin \theta \, k \parallel d\theta \right) d\varphi \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{3} \cos \varphi \cdot 3 \sin \varphi \, d\varphi \right) d\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2\varphi) \cdot \pi \, d\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{2} \pi$$

6. Om (x, y) ligger på kurvan så måste $x^4 \leq 14$ och $2y^4 \leq 14$
 (Obs! $x^4 \leq x^4 + x^2y^2 + 2y^4 = 14$
 $2y^4 \leq x^4 + x^2y^2 + 2y^4 = 14$)

vilket visar att kurvan är ett begränsat slutet område.
 Avståndet från en punkt (x, y) till origo ges av
 $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Då gäller det att bestämma
 minsta/största värde av $d(x, y)$ under bivillkoret
 $x^4 + x^2y^2 + 2y^4 = 14$, eller minsta/största värde av
 $f(x, y) = x^2 + y^2$ under bivillkoret $x^4 + x^2y^2 + 2y^4 = 14$.
 Både min och max av f existerar, ty f är kontinuerlig
 och kurvan är ett begränsat slutet område.
 Vi använder Lagrangesmetod för att bestämma
 dessa värden:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^4 + x^2y^2 + 2y^4 - 14)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda(4x^3 + 2xy^2) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda(2x^2y + 8y^3) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^4 + x^2y^2 + 2y^4 - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 4x^3 + 2xy^2 & 2x^2y + 8y^3 \end{vmatrix} = 0 \\ x^4 + x^2y^2 + 2y^4 - 14 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4xy(3y^2 - x^2) = 0 \\ x^4 + x^2y^2 + 2y^4 - 14 = 0 \end{cases}$$

Ur 1^a ekvationen fås $x=0$ eller $y=0$ eller $x = \pm\sqrt{3}y$

Om $x=0$ så ger 2^a ekvationen $2y^4 = 14$ dvs $y = \pm\sqrt[4]{7}$

Om $y=0$ —||— $x^4 = 14$ dvs $x = \pm\sqrt[4]{14}$

Om $x = \pm\sqrt{3}y$ —||— $9y^4 + 3y^4 + 2y^4 = 14$ dvs $y = \pm 1$

Följande punkter är kandidater för minimi/maxipunkter
 till f : $(0, \pm\sqrt[4]{7})$, $(\pm\sqrt[4]{14}, 0)$, $(\sqrt{3}, 1)$, $(-\sqrt{3}, 1)$, $(-\sqrt{3}, -1)$, $(\sqrt{3}, -1)$

$$f(0, \pm\sqrt[4]{7}) = \sqrt{7}, \quad f(\pm\sqrt[4]{14}, 0) = \sqrt{14}, \quad f(\pm\sqrt{3}, \pm 1) = 3 + 1 = 4$$

Vi får därmed att $\max f = 4$ och $\min f = \sqrt{7}$

Svar: minsta avståndet = $\sqrt{7}$, största avståndet = 2

7. Kurvan ges av parametriseringen
 $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ med

$$x(t) = 2\cos t, \quad y(t) = 2\sin t, \quad z(t) = 2\sin 2t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Vi har $x(t)y(t) = 4\cos t \sin t = 2\sin 2t = z(t)$ vilket visar att kurvan ligger i ytan $z = xy$

Eftersom $x^2(t) + y^2(t) = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t = 4$,

ligger kurvan också i cylindern $x^2 + y^2 = 4$.

Kurvan C är alltså randen till den del S av ytan $z = xy$ som ligger inom cylindern $x^2 + y^2 = 4$.

Enligt Stokes sats

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S \text{curl } F \cdot \hat{N} dS$$

där $\hat{N}$ - enhetsnormalvektorfält till ytan S riktad uppåt

$$\text{curl } F = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^i x y^3 & e^j x^3 & e^k z \end{vmatrix} = 3(x^2 + y^2)k$$

S kan parametriseras enligt:

$$r = r(x, y) = (x, y, xy) \text{ med } x^2 + y^2 \leq 4$$

(Obs! projektionen av S på xy -planet är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4$)

$$r'_x \times r'_y = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = -y i - x j + k$$

riktad (snett) uppåt.

Vi får därmed

$$\iint_S \text{curl } F \cdot \hat{N} dS = \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} 3(x^2 + y^2)k \cdot (-y i - x j + k) dx dy =$$

$$= 3 \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} (x^2 + y^2) dx dy = \left| \begin{array}{l} \text{Polära koordinater} \\ x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right| =$$

$$= 3 \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} r^2 \cdot r d\varphi \right) dr = 6\pi \int_0^2 r^3 dr = 24\pi$$

8. Se kursboken

