

Lösningssförslag till Tentamen
MVE470/MVE351, 2016-08-26.

1 a) För $f(x,y) = \sqrt{x^2+3y^2}$ har vi

$$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+3y^2}} (x^2+3y^2)'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}$$

$$f'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2+3y^2}} (x^2+3y^2)'_y = \frac{3y}{\sqrt{x^2+3y^2}}$$

i punkten $(1,1)$: $f'_x(1,1) = \frac{1}{2}$, $f'_y(1,1) = \frac{3}{2}$

linjäriseringen av f i $(1,1)$ ges av

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(1,1) + f'_x(1,1)(x-1) + f'_y(1,1)(y-1) = \\ &= 2 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{2}(y-1) \end{aligned}$$

Eftersom $(1.09, 1.01)$ ligger nära $(1,1)$ blir

$$\begin{aligned} f(1.09, 1.01) &\approx L(1.09, 1.01) = 2 + \frac{1}{2}(1.09-1) + \frac{3}{2}(1.01-1) = \\ &= \underline{2.06} \end{aligned}$$

(b) $F(x,y,z)$ är källfritt om $\text{div } F(x,y,z) = 0$

$$\begin{aligned} \text{div } F(x,y,z) &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(x+3y) + \frac{\partial}{\partial y}(y-2z) + \frac{\partial}{\partial z}(x+az) \\ &= 1 + 1 + a = 0 \quad \Rightarrow a = -2 \end{aligned}$$

Svar: $a = -2$

(c) Vi har att $r(t,s) = (s \cos t, s \sin t, s^2) = (0, 1, 1) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} s \cos t = 0 \\ s \sin t = 1 \\ s^2 = 1 \end{cases} \quad \text{varav} \quad \begin{cases} s = 1 \quad (\text{obs } s \geq 0) \\ \sin t = 1 \\ \cos t = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad \underline{t = \frac{\pi}{2}, s = 1.}$$

En normal till ytan i P ges av

$$r'_t \times r'_s \left(\frac{\pi}{2}, 1 \right)$$

$$r'_t = (-s \sin t, s \cos t, 0), \quad r'_s = (\cos t, \sin t, 2s) \quad \text{och}$$

$$\begin{aligned} r'_t \times r'_s &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -s \sin t & s \cos t & 0 \\ \cos t & \sin t & 2s \end{vmatrix} = i(2s^2 \cos t) - j(-2s^2 \sin t) + \\ &\quad + k(-s \sin^2 t - s \cos^2 t) = \\ &= 2s^2 \cos t \, i + 2s^2 \sin t \, j - s \, k \end{aligned}$$

och

$$r'_t \times r'_s \left(\frac{\pi}{2}, 1 \right) = 0 \cdot i + 2 \cdot j - 1 \cdot k$$

Svar: $(0, 2, -1)$

d) Vi beräknar $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x + 4y + 4x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x + 18y$$

Man ser lätt att $\nabla f(0,0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) = (0,0)$
och därmed är $p=(0,0)$ en kritisk punkt till f .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8 + 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 18$$

Hessianen i $p=(0,0)$ blir alltså

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 18 \end{bmatrix}$$

Eftersom $\det H(0,0) > 0$

och $a_{11} = 8 > 0$

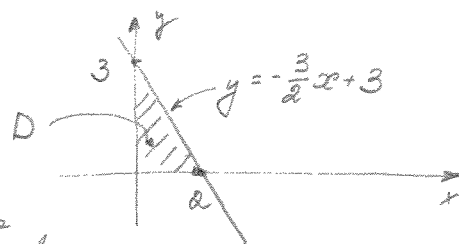
har f ett lokalt minimum i $p=(0,0)$

2. (a)

$$\iint_D xy \, dA = \int_0^2 \left(\int_0^{-\frac{3}{2}x+3} xy \, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^2 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=-\frac{3}{2}x+3} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x \left(-\frac{3}{2}x+3 \right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(9x - 9x^2 + \frac{9}{4}x^3 \right) dx = \dots = \frac{3}{2}$$



(b) Det är lämpligt att övergå till sfäriska koordinater:

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \sin \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \cos \varphi \end{cases}$$

D beskrivs då med olikheterna $1 < R < 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$

$$\iiint_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \, dV = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{R^2 \sin \varphi}{R^2} \, d\varphi \, d\theta \, dR = 2\pi [-\cos \varphi]_0^\pi = 4\pi$$

$$3. \quad \mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + (1+t) \mathbf{j} \Rightarrow \begin{cases} x = x(t) = t^2 \\ y = y(t) = 1+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-1)^2 = x \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow y = \sqrt{x} + 1$$

Partikelns fart är

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \|2t \mathbf{i} + \mathbf{j}\| = \sqrt{(2t)^2 + 1}$$

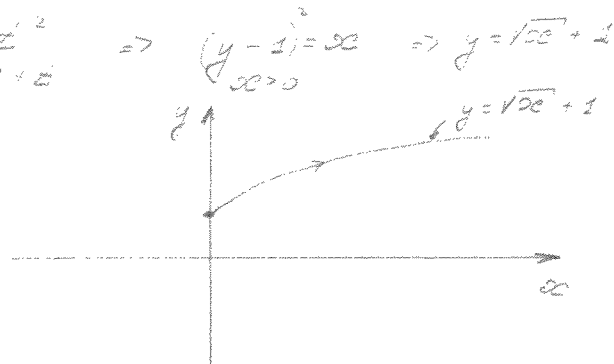
$$\|\mathbf{r}'(t)\| = 5 \Rightarrow \sqrt{4t^2 + 1} = 5 \Rightarrow$$

$$4t^2 + 1 = 25$$

$$t = \sqrt{6} \quad (t \geq 0)$$

Partikeln befinner sig i punkten $\mathbf{r}(\sqrt{6}) = 6\mathbf{i} + (1+\sqrt{6})\mathbf{j}$

Svar i punkten $(6, 1+\sqrt{6})$



4. Bestämmer först kritiska punkterna av f inom D :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x^2-y^2} + (x+y)e^{-x^2-y^2}(-2x) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x^2-y^2} + (x+y)e^{-x^2-y^2}(-2y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} e^{-x^2-y^2}(1-2x^2-2xy) = 0 \\ e^{-x^2-y^2}(1-2y^2-2xy) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x^2-2xy = 0 \\ 1-2y^2-2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2 = 2y^2 \\ 1-2x^2-2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 1-2x^2+2x^2 = 0 \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} x = y \\ 1-4x^2 = 0 \end{cases} \text{ dvs } \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ y = x \end{cases}$$

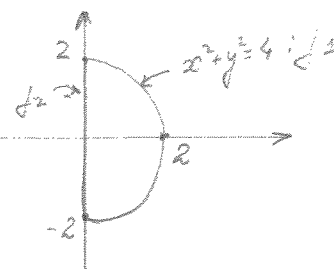
omöjligt

Endast $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ligger i D (ej $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$)

$$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{e}$$

Nu bestämmer vi max/min på randen:

f_1 kan parametreras enligt: $\begin{cases} x = 2\cos\varphi \\ y = 2\sin\varphi \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$



$$f(2\cos\varphi, 2\sin\varphi) = (2\cos\varphi + 2\sin\varphi)e^{-4} = 2e^{-4}(\cos\varphi + \sin\varphi)$$

$$(2e^{-4}(\cos\varphi + \sin\varphi))' = 0 \Leftrightarrow -\sin\varphi + \cos\varphi = 0 \Rightarrow \text{Lösningarna inom } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]: \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$f(2\cos\frac{\pi}{4}, 2\sin\frac{\pi}{4}) = \boxed{2\sqrt{2}e^{-4}}$$

Undersöker också värdena i ändpunkterna $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ och $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$f(2\cos(-\frac{\pi}{2}), 2\sin(-\frac{\pi}{2})) = f(0, -2) = \boxed{-2e^{-4}}$$

$$f(2\cos(\frac{\pi}{2}), 2\sin(\frac{\pi}{2})) = f(0, 2) = \boxed{2e^{-4}}$$

Vi har alltså att max f på f_1 är $2\sqrt{2}e^{-4}$
min f på f_1 är $-2e^{-4}$

f_2 kan parametreras enligt: $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [-2, 2]$

$$f(0, t) = te^{-t^2} \quad \text{låt } g(t) = te^{-t^2}$$

$$g'(t) = e^{-t^2} + te^{-t^2}(-2t) = e^{-t^2}(1-2t^2) = 0 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1}}$$

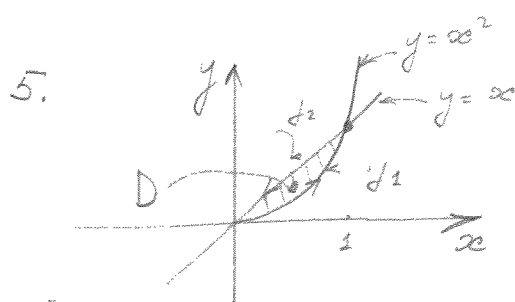
$$f(0, -2) = \boxed{-2e^{-4}}, \quad f(0, 2) = \boxed{2e^{-4}}$$

Vi har max f på f_2 är $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1}$ min f på f_2 är $-2e^{-4}$

Max f på D är det maximala värdet bland $\frac{1}{e}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1}, 2\sqrt{2}e^{-4}$ dvs $\frac{1}{e}$

Min f på D är det minimala värdet bland $\frac{1}{e}, -2e^{-4}$ dvs $-2e^{-4}$

Svar: $\max f = \frac{1}{\sqrt{e}}$, $\min f = -2e^{-4}$



(a) d_1 parametriseras enligt: $r_1(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$
 $-||-$ $r_2(t) = (t, t)$, $0 \leq t \leq 1$ Obs! orientering

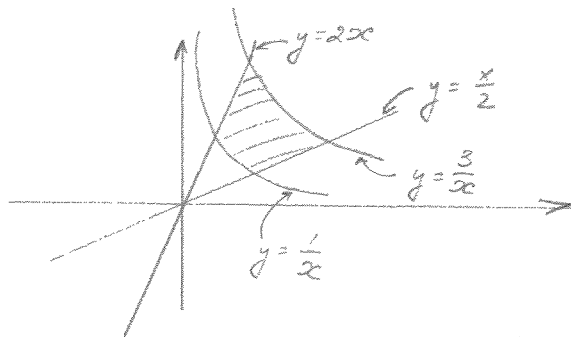
Enligt definitionen av kurvintegral blir

$$\begin{aligned} \oint_C xy dx + (x+y) dy &= \int_{d_1} xy dx + (x+y) dy + \int_{d_2} xy dx + (x+y) dy = \\ &= \int_{d_1} xy dx + (x+y) dy - \int_{d_2} xy dx + (x+y) dy = \\ &= \int_0^1 (t \cdot t^2, (t+t^2)) \cdot r_1'(t) dt - \int_0^1 (t \cdot t, (t+t)) \cdot r_2'(t) dt = \\ &= \int_0^1 (t^3, t+t^2) \cdot (1, 2t) dt - \int_0^1 (t^2, 2t) \cdot (1, 1) dt = \\ &= \int_0^1 (t^3 + 2t^2 + 2t^3) dt - \int_0^1 (t^2 + 2t) dt = \\ &= \left[\frac{3t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} \right]_{t=0}^{t=1} - \left[\frac{t^3}{3} + t^2 \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

(b) Enligt Greens formel är

$$\begin{aligned} \oint_C xy dx + (x+y) dy &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (x+y) - \frac{\partial}{\partial y} (xy) \right) dx dy = \\ &= \iint_D (1-x) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (1-x) dy \right) dx = \int_0^1 (1-x)(x-x^2) dx = \\ &= \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

6.



Det är lämpligt att gå över till nya variabler

$$u = xy \quad \text{och} \quad v = \frac{y}{x}$$

Eftersom $\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{3}{x}$ dvs $1 \leq xy \leq 3$
(obs! $x > 0$)

och $\frac{x}{2} \leq y \leq 2x$ dvs $\frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq 2$

vi får att de nya variablerna varierar inom
rektangeln $1 \leq u \leq 3, \quad \frac{1}{2} \leq v \leq 2$

Vi löser ut x, y via u, v :

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} uv = y^2 \\ \frac{u}{v} = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \\ y &= \sqrt{uv} \end{aligned}$$

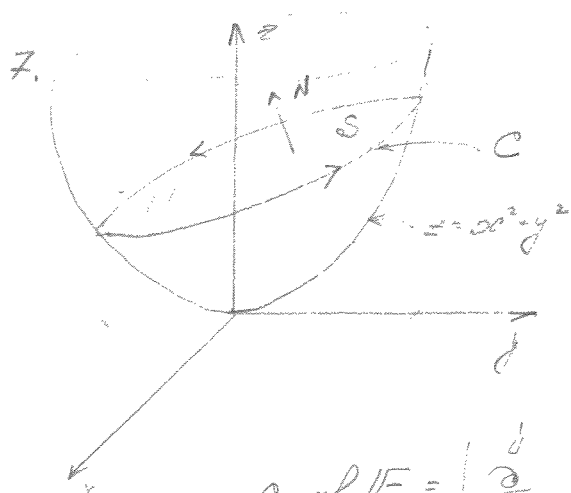
$$\text{Jacobianen} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{u}}{v^{3/2}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{1}{2} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4v} + \frac{1}{4v} = \frac{1}{2v}$$

Vi har alltså

$$\iint_D \frac{x}{y} dx dy = \iint_{\substack{1 \leq u \leq 3 \\ \frac{1}{2} \leq v \leq 2}} \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{2v} du dv = \int_1^3 \left(\int_{1/2}^2 \frac{1}{2v^2} dv \right) du =$$

$$= \left[-\frac{1}{v} \right]_{v=1/2}^{v=2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$



$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

(S är den del av planet
 $z = 2x + 2y + 2$ som ligger inom
paraboloiden $z = x^2 + y^2$
med normalerna som pekar
uppåt.)

$$\text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & 0 & z^2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot 0 - \mathbf{j} \cdot 0 + \mathbf{k} \cdot (-x) = -x\mathbf{k}$$

Parametrisering av S: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (u, v, 2u + 2v + 2)$
(u, v) ligger inom projektion av S på
 xy -planet

Skärningen C ges av $\begin{cases} x^2+y^2 = 2x+2y+2 \\ z = x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x+y^2-2y = 2 \\ z = x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2 = 4 \\ z = x^2+y^2 \end{cases}$$

Vi har alltså att projektionen av S på xy -planet är området inom cirkeln $(x-1)^2+(y-1)^2 = 4$

Vi har $\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 1\vec{k}$
 pekar uppåt

Vi har att

$$\iint_S \text{curl } F \cdot d\vec{S} = \iint_{(u-1)^2+(v-1)^2 \leq 4} -4 \cdot \vec{k} \cdot (-2\vec{i} - 2\vec{j} + 1\vec{k}) du dv =$$

$$= - \iint_{(u-1)^2+(v-1)^2 \leq 4} u du dv = \left| \begin{array}{l} \text{Polära coord.} \\ u-1 = r \cos \varphi \\ v-1 = r \sin \varphi \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right| \cdot 2$$

$$= - \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (1+r \cos \varphi) \cdot r d\varphi \right) dr =$$

$$= -2\pi \int_0^2 r dr = -4\pi.$$

3. Se kursboken.