

Övningshjälp,

Adams 12.4-12.7
13.1, 13.2

Läs igenom respektive delkapitel noga innan
Du börjar lösa övningar.

10. (12.4) En funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är harmonisk i ett område D om den har kontinuerliga derivator av ordning 2 i alla punkter i D samt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad (*)$$

För $(x, y) \neq (0, 0)$ beräkna $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
och se om de uppfyller $(*)$

6 (12.5) (se Example 2, s. 697).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{e^{2st} \cdot s - (1+s^2 \cos t) \cdot s^2 \cos t}{\sqrt{e^{2st} + (1+s^2 \cos t)^2}}; \text{ Svar}$$

7 (12.5) (se Example 2, s. 697)

9, 11 (12.5) (se Example 3, s. 698)

15 (12.5)

$$(a) \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} =$$

$$= f_1(2s+3t, 3s-2t) \cdot 2 + f_2(2s+3t, 3s-2t) \cdot 3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right) = 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} (f_1) \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} (f_1) \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \right) +$$
$$+ 3 \left(\frac{\partial}{\partial x} (f_2) \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} (f_2) \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \right) =$$

$$= 2f_{11}(2s+3t, 3s-2t) \cdot 2 + 2f_{12}(2s+3t, 3s-2t) \cdot 3$$

$$+ 3f_{21}(2s+3t, 3s-2t) \cdot 2 + 3f_{22}(2s+3t, 3s-2t) \cdot 3$$

$$= (f_{12} = f_{21}) = 4f_{11}(2s+3t, 3s-2t) + 12f_{12}(2s+3t, 3s-2t) + 9f_{22}(2s+3t, 3s-2t)$$

19 (12.5) Se Example 3, s. 698, och uppsitter 15, 17
(A: 12.5)

1 (12.6) Bestäm linjäriseringen av $f(x, y)$
i punkten $(3, 1)$

20 (12.6)

$$Dg(1, 3, 3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial s} & \frac{\partial g_1}{\partial t} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial s} & \frac{\partial g_2}{\partial t} \\ \frac{\partial g_3}{\partial r} & \frac{\partial g_3}{\partial s} & \frac{\partial g_3}{\partial t} \end{bmatrix} \quad \text{där} \quad \begin{aligned} g_1(r, t, s) &= r^2 s \\ g_2(r, t, s) &= r^2 t \\ g_3(r, t, s) &= s^2 - t^2 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

$$g(0.99, 3.02, 2.97) \approx g(1, 3, 3) + Dg(1, 3, 3) \begin{bmatrix} 1 - 0.99 \\ 3 - 3.02 \\ 3 - 2.97 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ 0.03 \end{bmatrix}$$

1 (12.7) (a) Se Definition 6

(b) Använd kapitel 12.3, s. 687
eller skriv om ytans ekvation till
 $x^2 - y^2 - z = 0 \quad (*)$
och bestäm en ekvation för
tangentplanet till nivåytan $(*)$
i $(2, -1, f(2, -1))$

$(*)$ är nivåytan
 $g(x, y, z) = 0$, där $g(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$.

(c) $\nabla f(2, -1)$ är en normal
till nivåkurvan
Tangentlinjens ekvation blir då
 $f_2(2, -1)(x - 2) + f_2(2, -1)(y + 1) = 0$.

3, 5 (12.7) Se uppgift 1 (12.7)

13 (13.1) Kritiska punkter är lösningar till systemet

$$\begin{cases} \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \\ \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \end{cases} \quad (\text{Förkorta ej med } y \text{ och } x \text{ i resp 1}^{\text{a}} \text{ och 2}^{\text{a}} \text{ ekvationerna!})$$

Ur 1^a ekv blir $y=0$ eller $y^2=x^2$ dvs $y=\pm x$
Stoppar $y=0$ i 2^a ekv och får $x=0$ omöjligt
 $y=\pm x$ är lösningar för den 2^a ekv också

Kritiska punkterna är $(x, -x)$ för alla värde av $x \neq 0$
och (x, x) —//—

$$\text{Vi har att } f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \text{ för alla } x \neq 0$$
$$\text{och } f(x, -x) = \frac{-x^2}{x^2 + x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Jämför } f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ med } \frac{1}{2} \text{ och } -\frac{1}{2}$$

för att avgöra karaktären av kritiska punkterna (x, x) och $(x, -x)$.

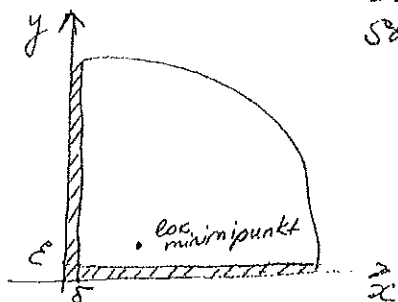
22 (13.1) Observera att mängden $\{(x, y); x > 0, y > 0\}$ är inte-kompakt (dvs ej begränsat, slutet område) och man kan ej använda sat s 2 (s. 746)

För att se att funktionsvärde i lokal minipunkt är absolut minimum för f skall man observera att $f(x, y) \rightarrow +\infty$ då $x \rightarrow +\infty$ eller $y \rightarrow +\infty$ och därmed blir funktionsvärdena stora utanför cirkelstrålen med stor radie R och centrum O .

Eftersom $f(x, y) \rightarrow +\infty$ då $x \rightarrow 0$ och $f(x, y) \rightarrow +\infty$ då $y \rightarrow 0$

blir f stor i det skuggade område.

Utifrån detta resonera att lokal minipunkt är absolut minipunkten



Obs! på f_1 tjoper punkterne $(x, 0)$, $0 \leq x \leq 1$
 f_2 " " " " $(1, y)$, $0 \leq y \leq 1$
 f_3 " " " " $(x, 1)$, $0 \leq x \leq 1$
 f_4 " " " " $(0, y)$, $0 \leq y \leq 1$

3. Jämför funktionsvärde i de kritiska punkterna med maxvärdena av f på kurvorna f_2, f_3, f_4 .
Det största blir f 's största värde på området
OBS: $x=1, y=1$.

A diagram of a triangle in the complex plane. The horizontal axis is labeled x and the vertical axis is labeled y . The origin is marked with a dot. The triangle has vertices at the origin, j on the y -axis, and 2π on the x -axis. The sides are labeled f_1 (the y -axis segment), f_2 (the hypotenuse), and f_3 (the x -axis segment).

Funktionens värde på randen blir alltid:

$$f(x, y, z) = xy^2 + y^2(1 - x^2 - y^2) = xy^2 + y^2 - x^2y^2 - y^4$$

Det gäller att bestämma max, min

för $p(x, y) = \frac{\cos y^2 + y^2 - x^2 y^2 - y^4}{\rho^2}$ $x^2 + y^2 \leq 1$.

Extra uppgift (vecka 3)

andra uppgift (vecka 3)
 Betrakta $L(x, y) = x^2 + y^2 = (\text{avståndet från origo till } (x, y))^2$
 i $\mathbb{R}^2$. Skissa nivåkurvorna för L under kvadranten

Betrakta $f(x, y) = x + y - 13x^2 - 13y^2 + 10xy - 72$
Bestäm max/min av f under förhållandet
 $13x^2 + 13y^2 + 10xy - 72 = 0$

$$13x^2 + 13y^2 + 10xy - 72 = 0$$

Svar: $\max f = 9, \quad \min f = 4$

$\max. \text{avståndet} = 3$ $\max. \text{avståndet} = 2$.