Rekommenderade uppgifter MVE470, MVE351, Flervariabelanalys, vt 17

Läsvecka 1

Avsnitt	Uppgifter
12.1	1, 3, 5, 12, **13**, **14**, 15, 17, 20, 27
8.2	3, 5, 7
11.1	1, **3**, **7**, 11
11.3	**1**, 2, **3**, 4, **7**, 13, 19
12.2	1, 2, **5**, **4**

Extra övningar

1. Rita ellipserna

   (a) $4x^2 + 9y^2 = 36$

   (b) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

2. Skissa hyperblerna

   (a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$,

   (b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$.

3. Rita följande mängder i $\mathbb{R}^2$

   (a) $M_1 = \{(x,y) : y > x^2\}$,

   (b) $M_2 = \{(x,y) : |y| \leq x^2\}$,

   (c) $M_3 = \{(x,y) : x^2 - 2x + y^2 + 4y < 4\}$,

   (d) $M_4 = \{(x,y) : |y| > 1 - |x|\}$.

4. Rita följande mängder i $\mathbb{R}^2$

   (a) $M_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$,

   (b) $M_2 = \{(x,y) : |x| + |y| < 1\}$,

   (c) $M_3 = \{(x,y) : \max(|x|,|y|) \leq 1\}$,

   (d) $M_4 = \{(x,y) : x^2 - 2x + y^2 - 4y < 11\}$.

5. Rita nivåkurvorna till nedanstående funktioner. Beskriv sedan graferna geometriskt

   (a) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$,

   (b) $f(x,y) = x + 2y - 2$,

   (c) $f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$, $x^2 + y^2 < 1$,

   (d) $f(x,y) = (1 - y^2)^{1/2}$, $|y| \leq 1$,

   (e) $f(x,y) = x$.

6. Rita kurvorna

   (a) $\mathbf{r}(t) = (t, t^2 + 1)$, $0 \leq t \leq 2$,

   (b) $\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t, -2 + \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$,

   Markera också en orientering.

7. Kurvan γ ges av

$$\begin{cases} x &= \cos t \\ y &= \sin t \qquad 0 \le t \le 2\pi \\ z &= \cos 2t \end{cases}$$

   (a) Visa att kurvan ligger på ytan $z = x^2 - y^2$;

   (b) I vilka punkter har en partikel som rör sig längs γ störst fart? Betsäm denna.

8. Avgör om följande gränsvärden existerar och beräkna dem i förekommande fall:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xy-1}{x-1}$;

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x-y}{x-1}$;

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$;

   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

   (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+2y^2}{2x^2+y^2}$.

Läsvecka 2

Avsnitt	Uppgifter
12.3	1, 3, 5, 8, 11, 13, 14, 17, **19**, 25
12.4	1, 3, 5, 10, **17**
12.5	1, 6, 7, 9, 11, 15, **17**, 19
12.6	1, **3**, **20**

Läsvecka 3

Avsnitt	Uppgifter
12.7	1, 3, 5, **21**
12.9	1, 5, 7 (grad 2 räcker)
13.1	1, **3**, 7, **9**, 13, 22
13.2	**1**, **3**, 5, 7, 11
13.3	1, **3**, **5**, 7, 9, 14

Extra uppgifter

1. Använd Lagranges multiplikatormetod för att bestämma största och minsta avståndet från ellipsen $13x^2 + 13y^2 + 10xy = 72$ till origo.

Läsvecka 4

Avsnitt	Uppgifter
14.1	13, 14
14.2	1,3, 5, 7, **9**, 11, **13**, 15
14.3	3, **7**, 9, 17
14.4	1, 3, 7, 9, **21**, 32, **33**
A.14.5	1, 3, 5, **7**
14.6.	1, **11** , 12, **15**

Extra uppgifter

1. Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_D xy^2 dA$$
där D är det område som avgränsas av x-axeln och de två kurvorna $y = x^2$ och $y = 2 - x$ för $x \geq 0$.

2. Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_D (x^2 - y^2) dA$$
där D är det område i andra kvandranten som avgränsas av y-axeln, linjen $y = -x$ och cirkeln $x^2 + y^2 = 1$. (Bra att veta: $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos(2\alpha)$).

3. Beräkna trippelintegralen
$$\iiint_K z dx dy dz$$
där K är den kropp som begränsas av ytan $z = 2 - x^2 - y^2$ och xy-planet.

4. Beräkna trippelintegralen
$$\iiint_K (1 + z) dV,$$
där K är den del av enhetsklotet som ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Läsvecka 5

Avsnitt	Uppgifter
A.15.1	1, **3**, 5
15.2	1, 3, **5**, 9
15.3	1, **3**, 5
15.4	**1**, 3, 5, **7**, 15

Extra uppgifter

1. Låt $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ vara ett vektorfält i $\mathbb{R}^2$.
   (a) Bestäm fältlinjerna till vektorfältet $\mathbf{F}$.
   (b) Visa att $\mathbf{F}$ är ett konservativt vektorfält genom att beräkna en potential ϕ till $\mathbf{F}$.
   (c) Skissa några fältlinjer samt några nivåkurvor till ϕ. Vad finns det för samband mellan nivåkurvorna och fältlinjerna?

2. Låt $\mathcal{C}$ vara den moturs orienterade cirkeln $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$. Låt
$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$$
vara ett vektorfält i $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. Beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ genom att använda kurvintegralens definition.

3. (a) Vilket av följande vektorfält är konservativt? Hitta en potential för det konservativa vektorfältet

$$(a)\ \boldsymbol{F}_1(x,y) = (2xy+2x)\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} \quad (b)\boldsymbol{F}_2(x,y) = 2xe^y\boldsymbol{i} + (x^2e^y + x)\boldsymbol{j}$$

   (b) Räkna ut integralen $\oint_C \boldsymbol{F}_2(x,y)dr$, där C är en positivt orienterad cirkel med centrum i $(1,1)$ och radien 1.

Läsvecka 6

Avsnitt	Uppgifter
A.15.5	**3**, **7**, 9
A.15.6	**1**, 3, 7

Extra uppgifter

1. Beräkna arean av den del av ytan $z = x^2+y^2+1$ som ligger innanför cylindern $x^2+y^2 = 9$.
2. Låt S vara den del av sfären $x^2+y^2+z^2 = 3$ där $x \geq 0$, $z \geq 0$.
   - Beskriv ytan S is sfäriska koordinater
   - Beräkna ytintegralen $\iint_S zdS$.
3. Låt $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ut ur området $z \leq 4 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$. (Tips: Symmetriargumenter kan hjälpa vid beräkningen av en dubbelintegral).

Läsvecka 7

Avsnitt	Uppgifter
A.16.1	1, 3, **6**, 7
A.16.2	3, **5**, 7
A.16.3	**1**, 2, 3, 5
A.16.4	1, 3, **5**, 7, 9, **11**, 15, 17
A.16.5	**1**, 3

Extra uppgifter.

1. Rita i grova drag med angivande av orientering kurvan

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t(1-t^2) \end{cases} \qquad -1 \leq t \leq 1.$$

   Beräkna arean av det området kurvan omslutar.

2. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma (-y^3)dx + (x^3 + e^{y^2})dy$$

   där γ är halvcirkeln $(2\cos t, 2\sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$. (Tips: Slut kurvan på lämpligt sätt och använd Greens sats.)

3. Låt C vara kurvan som ges av parametriseringen $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + 2 + sin 2t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, och låt $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (e^y + x^3)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$. Visa att kurvan C ligger på ytan $z = xy$ och cylindern $x^2 + y^2 = 4$ och använd Stokes sats för att beräkna kurvintegralen $\oint_C \mathbf{F} d\mathbf{r}$.

4. Låt S vara den del av ytan $z = 9 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför xy-planet. Räkna ut flödet upp genom S för vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{yz}\mathbf{i} + x\mathbf{j} + e^{-x^2-y^2}\mathbf{k}$ genom att tillämpa Gauss divergenssats på lämpligt sätt.