

Lösningstips till Tentamen

TMAV036C/MVE350, 2015-04-17

1. (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 4y^3$, varav

$\nabla f(1,1) = (6, 2)$. Den senare är en normal till nivåkurvan $f(x,y) = C$ genom punkten $(1,1)$ (obs! $C = f(1,1) = 3$) i punkten $(1,1)$.

En ekvation för normallinjen till $f(x,y) = 3$ i $(1,1)$ blir då $\frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{2}$, dvs

$$3y - x - 2 = 0$$

1 punkt i $(1,1)$ avtar f snabbast i

riktningen $-\nabla f(1,1)$, dvs $(-6, -2)$

Svar: $3y - x - 2 = 0$, i riktningen $(-6, -2)$

(b) Enligt kedjeregeln får vi

$$\frac{d}{ds} f(x,y) = f_1(x,y) \frac{dx}{ds} + f_2(x,y) \frac{dy}{ds} =$$

$$= f_1(x,y) e^s + f_2(x,y) \cdot 2s$$

$$\frac{d^2}{ds^2} f(x,y) = \frac{d}{ds} \left(\frac{d}{ds} f(x,y) \right) = \frac{d}{ds} (f_1(x,y) e^s + f_2(x,y) \cdot 2s)$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{vi använder} \\ \text{produktregeln} \\ \text{och kedjeregeln} \end{array} \right| = \frac{d}{ds} (f_1(x,y)) \cdot e^s + f_1(x,y) e^s +$$

$$+ \frac{d}{ds} (f_2(x,y)) \cdot 2s + f_2(x,y) \cdot 2 = \left(f_{11}(x,y) \frac{dx}{ds} + f_{12}(x,y) \frac{dy}{ds} \right) e^s +$$

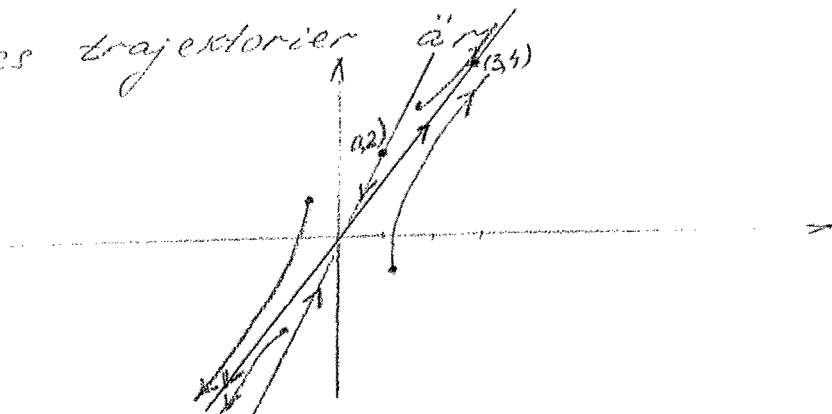
$$+ f_1(x,y) e^s + \left(f_{21}(x,y) \frac{dx}{ds} + f_{22}(x,y) \frac{dy}{ds} \right) \cdot 2s + f_2(x,y) \cdot 2 =$$

$$= \left| f_{12}(x,y) - f_{21}(x,y) \right| = f_{12}(x,y) e^{2s} + f_{12}(x,y) \cdot 4s e^s + f_{22}(x,y) \cdot 4s^2 + f_1(x,y) e^s + f_2(x,y) \cdot 2$$

(c) Samtliga lösningar till systemet ges av

$$x(t) = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lösningarnas trajektorier



(d) Vi använder Gram-Schmidt ortogonaliseringsprocedur:

$$u_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\{u_1, u_2\}$ är en ortogonalbas för planet $\text{Span}\{v_1, v_2\}$

En ortonormerad bas för detta plan är

$$\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Svar: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

2. Vi kollar först de kritiska punkterna:

$$\begin{cases} f_x = 0 \Rightarrow 3x^2y = 0 \\ f_y = 0 \Rightarrow -x + 2y = 0 \end{cases}$$

Detta system har två lösningar, $(0, 0)$ och $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$.

Notera att den första punkten ligger på randen medan den andra ligger i det inre av området.

Vi har $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -\frac{1}{132}$. Näst kollar vi kvadraterns rand, som består av 4 olika sträckor.

(a) f_1 består av punkten $(0, y)$, $0 \leq y \leq 1$.
Vi har $f(0, y) = y^2$ så $\min f$ på f_1 är 0 och $\max f$ på f_1 är 1

(b) f_2 består av $(x, 1)$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\text{Vi har } f(x, 1) = x^3 - x + 1$$

$$\text{och } (x^3 - x + 1)' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

där endast $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ligger i intervallet $[0, 1]$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ vilket ligger mellan noll och ett}$$

I ändpunkterna blir $f(0, 1) = 1$, $f(1, 1) = 1$

$$\text{Vi har alltså att } \max f \text{ på } f_2 = 1 \\ \min f \text{ på } f_2 = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}} (> 0)$$

(c) f_3 består av $(1, y)$, $0 \leq y \leq 1$ och

$$f(1, y) = 1 - y + y^2$$

$$(1 - y + y^2)' = 0 \Leftrightarrow 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

I ändpunkterna blir $f(1, 0) = 1 = f(1, 1)$
 $f(1, \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$
Detta ger att $\max f \text{ på } f_3 = 1$ och $\min f \text{ på } f_3 = \frac{3}{4}$

(d) f_4 består av $(x, 0)$, $0 \leq x \leq 1$ och $f(x, 0) = x^3$
vars $\max$ på $[0, 1]$ är 1 och $\min$ är 0.

Sammanlagt ser vi att det minsta värdet som antas av funktionen över hela kvadraten är $-\frac{1}{432}$ medan att det största värdet är 1.

Svar: $\max f = 1$, $\min f = -\frac{1}{432}$.

3. (a) Se kursboken

(b) Man ser lätt att $u_1 \cdot u_2 = 0$, $u_1 \cdot u_3 = 0$ och $u_2 \cdot u_3 = 0$ vilket visar att $\{u_1, u_2, u_3\}$ är en ortogonal bas för $\text{Span}\{u_1, u_2, u_3\} = H$

(c) Projektionsformel ger nu att

$$\begin{aligned} \text{proj}_H x &= \frac{x \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{x \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 + \frac{x \cdot u_3}{u_3 \cdot u_3} u_3 = \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Avståndet från x till H ges av

$$\|x - \text{proj}_H x\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{6} \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

4. (a) Volymen $= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 2} (2 - (x^2+y^2)) dA$ (på grund av symmetri)

Vi byter till polära koordinater

och får

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2) r dr d\varphi = \pi \left[r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{2}} = \pi$$

(b) Area = $\iint_{\substack{0 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq u}} \|r'_u \times r'_v\| du dv$

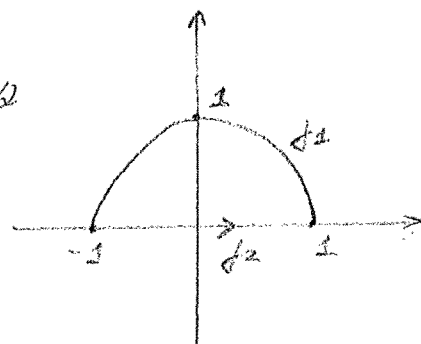
Vi har $r'_u \times r'_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2i + j + k$

och $\|r'_u \times r'_v\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$.

Area blir alltså $\int_0^2 \left(\int_0^u \sqrt{6} dv \right) du = \sqrt{6} \int_0^2 u du = 2\sqrt{6}$

5. (a) Halvcirkeln γ har den naturliga parametreringen $x = \cos \theta, y = \sin \theta$
 $\theta \in [0, \pi] \quad (r_1(\theta) = \cos \theta i + \sin \theta j)$

Sträckan γ_2 kan parametreras enligt $x = t, y = 0, t \in [-1, 1]$
 $(r_2(t) = t i + 0 j)$



Vi har $\oint_C y^2 dx + x dy = \oint_C (y^2 i + x j) \cdot dr =$
 $= \int_{\gamma_1} (y^2 i + x j) \cdot dr + \int_{\gamma_2} (y^2 i + x j) \cdot dr =$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\sin^2 \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \cdot (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j})}{\|r_1'(\theta)\|} d\theta + \int_{-1}^1 \frac{(0 \cdot \mathbf{i} + z \mathbf{j}) \cdot (z \mathbf{i} + 0 \mathbf{j})}{\|r_2'(z)\|} dz$$

$$= \left(\text{där } \|r_1'(\theta)\| = \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 1 \right)$$

$$= \int_0^{\pi} (-\sin^3 \theta + \cos^3 \theta) d\theta + 0$$

Sedan tillämpar vi trigonometriska

$$\text{formlerna: } \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

() och får

$$\oint_C y^2 dx + x dy = \int_0^{\pi} -(1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} -(1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta + \frac{\pi}{2} = \left| \begin{array}{l} \text{variabelbyte} \\ \cos \theta = s \\ ds = -\sin \theta d\theta \\ \theta = 0 \Rightarrow s = 1 \\ \theta = \pi \Rightarrow s = -1 \end{array} \right|$$

$$= \int_1^{-1} (1 - s^2) ds + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \left[s - \frac{s^3}{3} \right]_{s=1}^{-1} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$$

(8) Greens sats säger

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy =$$

() där D är den övre halvan av enhetscirkeln - skivan

$$= \iint_D (1 - 2y) dx dy = \left| \begin{array}{l} \text{Polära koordinater} \\ x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\int_0^1 (1 - 2r \sin \varphi) r dr \right) d\varphi = \int_0^{\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{2}{3} r^3 \sin \varphi \right]_{r=0}^{r=1} d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin \varphi \right) d\varphi = \left[\frac{1}{2} \varphi + \frac{2}{3} \cos \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$$

6. Vi gör variabelbyte: $u = x+y$
 $v = 3x-2y$

Då $1 \leq u \leq 2$, $2 \leq v \leq 4$

$$\text{och } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\text{dvs } x = \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}v$$

$$y = \frac{3}{4}u - \frac{1}{4}v$$

$$\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

Vi har alltså

$$\left(\iint_D (x+y) dx dy = \iint_{\substack{1 \leq u \leq 2 \\ 2 \leq v \leq 4}} u \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv = -\frac{1}{4} \int_1^2 \left(\int_2^4 u dv \right) du = \right.$$

$$= -\frac{1}{4} \left[\frac{u^2}{2} \right]_{u=1}^{u=2} = \frac{3}{4}$$

Svar: $\frac{3}{4}$

$$\left(7. \text{ Vi beräknar } \text{curl } F = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{4}{y^5} & \frac{6}{x^3} & \frac{1}{z^4} \end{vmatrix} = (3x^2 - 5y^4)k \right.$$

(Ytan är en del av funktionsytan $z = x^2 + y^2$
 och har parametrisering
 $w(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

$$w'_x \times w'_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = -2x i - 2y j + k$$

som pekar in i paraboloiden.

$$\text{Därför blir flödet} = - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (3x^2 - 5y^4)k \cdot (-2x i - 2y j + k) dx dy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (5y^4 - 3x^2) dx dy$$

Det är naturligt att byta till polära koordinater som leder till integralen

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (5r^4 \sin^4 \theta - 3r^3 \cos^2 \theta) r dr \right) d\theta = \dots$$

$$= \frac{5}{6} \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta d\theta - \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta$$

Vi använder trigonometriska formlerna

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \text{ och } \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\text{och får } \sin^4 \theta = \frac{1}{4}(1 - \cos 2\theta)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \cos^2 2\theta =$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta$$

Bara konstanterna ger nollskilda bidrag till integralerna. Slutligen blir

$$\text{flödet} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3\pi}{4} - \frac{3}{4} \pi = \underline{\underline{-\frac{\pi}{8}}}$$

Näst beräknar vi kurvintegralen

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Randen till S är cirkeln $x^2 + y^2 = 1, z = 1$

Om vi skulle gå moturs så parametreras cirkeln med $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1), 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\text{så } \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (\sin^5 t, \cos^3 t, 1)$$

och för en medurs orienterad ∂S får vi

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_0^{2\pi} (\sin^5 t, \cos^3 t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^6 t - \cos^4 t) dt$$

Man kontrollerar på liknande vis som innan

$$\text{att } \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \frac{3\pi}{4}, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \frac{5\pi}{8},$$

så kurvintegralen blir $5\pi/8 - 3\pi/4 = -\pi/8$
precis som flödesintegralen.

8. (a) Om v är en egenvektor till A
tillhörande egenvärde λ så blir

Xv en egenvektor till AXX^{-1}
till samma egenvärdet λ , ty

$$XAX^{-1}(Xv) = XAX^{-1}Xv = XAv = X\lambda v = \lambda Xv$$

Eftersom B är en 3×3 -matris

blir B 's egenvärden $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$

Egenrummet till $\lambda_1 = 2 = \text{Span}\{Xv_1\} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}\right\}$

—||— $\lambda_2 = 3 = \text{Span}\{Xv_2\} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$

—||— $\lambda_3 = 4 = \text{Span}\{Xv_3\} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix}\right\}$

(b) Om $v_1 = \mu v_2$ så blir $Av_1 = A(\mu v_2)$

och, eftersom $Av_1 = \lambda_1 v_1$ och $Av_2 = \lambda_2 v_2$,
för några λ_1, λ_2

ger detta

$$\lambda_1 v_1 = \lambda_2 \mu v_2 \quad (1)$$

Å andra sidan

$$v_1 = \mu v_2 \Rightarrow \lambda_1 v_1 = \lambda_1 \mu v_2 \quad (2)$$

Ur (1) och (2) fås $\lambda_2 \mu v_2 = \lambda_1 \mu v_2$

$$\text{dvs } (\lambda_2 - \lambda_1) \mu v_2 = 0$$

Eftersom $\lambda_2 \neq \lambda_1$ och $v_2 \neq 0$ (ty en egenvektor)

så måste $\mu = 0$, och därmed $v_1 = 0$

vilket är omöjligt, ty en egenvektor $\neq 0$.