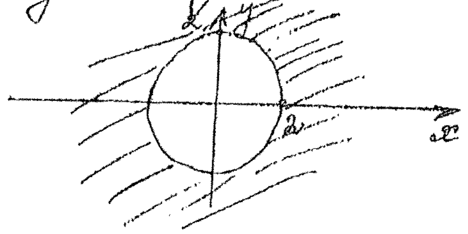
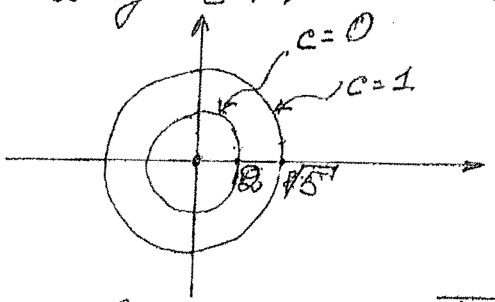
Lösningsförslag till Tentamen
TMV 036c/MVE 350, 2015-08-24

1(a) $D(f)=\{(x,y): x^2+y^2\geq 4\}$



Nivåkurvor: $\sqrt{x^2+y^2-4}=C$ = konst >0

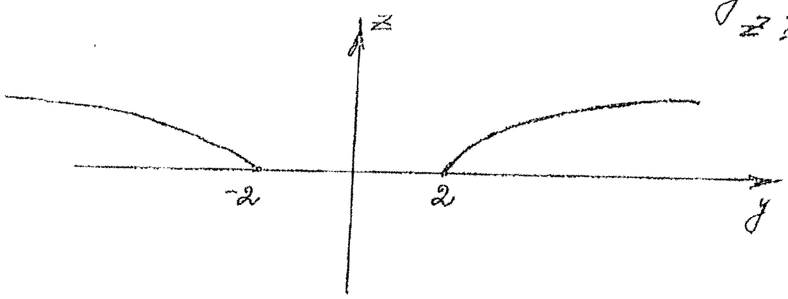
$\iff$ $x^2+y^2=C^2+4$ ← cirklar med centrum i $(0,0)$ och radien $\sqrt{C^2+4}\geq 2$



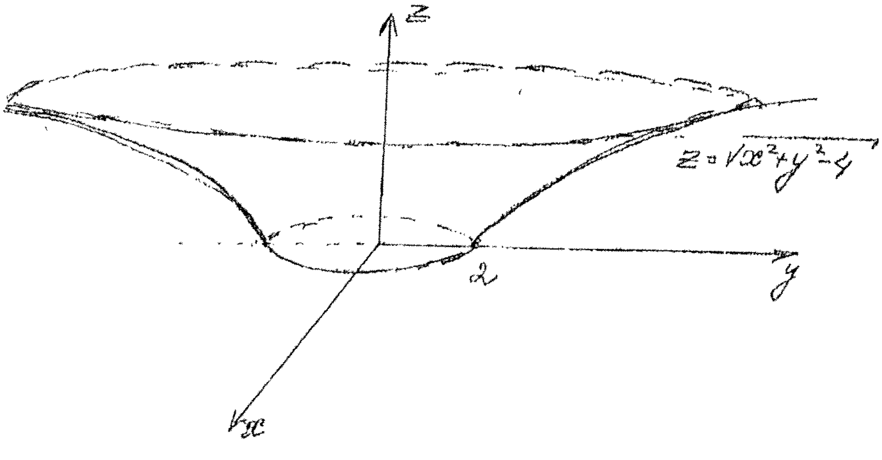
Skärningarna mellan ytan $z=\sqrt{x^2+y^2-4}$ och plan $z=C$ består av ~~kurvor~~ vars projektionen i xy-planet är cirklar $x^2+y^2=C^2+4$ då $C\geq 0$. För övriga C-värden är skärningen tom.

yz-Planet $(x=0)$ ger skärningen $z=\sqrt{y^2-4}$

$\iff y^2-z^2=4$, $z\geq 0$



Ytan blir då



(b) $\frac{\partial f}{\partial x} = -e^{y^2-x} + x\cos(x-y^2) + \sin(x-y^2)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{y^2-x} - 2xy\cos(x-y^2)$

varav $\nabla f(4,2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(4,2), \frac{\partial f}{\partial y}(4,2)\right) = (3,-12)$

(i) Linjäriseringen av $f(x,y)$ i $(4,2)$ blir

$$L(x,y) = f(4,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(4,2)(x-4) + \frac{\partial f}{\partial y}(4,2)(y-2) =$$
$$= 1 + 3(x-4) - 12(y-2) =$$
$$= 3x - 12y + 13$$

(ii) En ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i $(4,2,1)$ blir då

$$\underline{z} = L(x,y) = \underline{3x - 12y + 13}$$

(iii) $\nabla f(4,2) = (3,-12)$ är en normal till nivåkurvan $f(x,y) = C$ genom $(4,2)$

(c) Hastigheten av partikeln vid tidspunkten t ges av
$$r'(t) = (\cos t, 2t, 6t^5 - e^t)$$

Vi sätter $r'(t) = (1,0,-1)$ och får
$$(\cos t, 2t, 6t^5 - e^t) = (1,0,-1)$$
$$\Leftrightarrow t = 0.$$

Accelerationen i $t=0$ blir
$$r''(0) = (-\sin t, 2, 30t^4 - e^t)\big|_{t=0} = (0,2,-1)$$

Svar: $(0,2,-1)$ - accelerationen

(d) Vi använder Gram-Schmidt ortogonaliseringsprocedur:

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\-1/2\\-1\\0\end{bmatrix}$$

En ortogonalbas för underrummet W är t.ex.

$$\mathcal{B} = \{u_1, 2u_2\} = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\-2\\0\end{bmatrix}\right\}$$

Vi har

$$\frac{v \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\|^2} = \frac{3}{2} \quad , \quad \frac{v \cdot \begin{bmatrix}-1\\-1\\-2\\0\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\\0\end{bmatrix}\right\|^2} = \frac{1}{2}$$

Koordinater av v i den ortogonala basen $\mathcal{B}$ blir alltså $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

2. (a) Vi kollar först de kritiska punkterna

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^3 \\ x^9 - x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^3 \\ x(x^8-1) = 0 \end{cases}$$

Systemet har tre lösningspar: $(0,0)$, $(1,1)$ och $(-1,-1)$.

Kritiska punkter: $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$

(b) Hessianen $\mathcal{H}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 \, , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 \, , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4$$

$\mathcal{H}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \mathcal{H}(0,0) < 0 \Rightarrow (0,0)$ är en sadelpunkt

$\mathcal{H}(1,1) = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \mathcal{H}(1,1) > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 12 > 0$ $\Rightarrow (1,1)$ är en lokal minimipunkt

$\mathcal{H}(-1,-1) = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow (-1,-1)$ - en lokal minimipunkt

3 (a) Ytan kan parametriseras enligt
$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2+v^2+1)$ där $u^2+v^2 \le 9$

Arean $= \iint_D \| \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \| \, du\,dv$, där D är cirkelskivan $u^2+v^2 \le 9$.

$\mathbf{r}'_u = (1, 0, 2u)$, $\mathbf{r}'_v = (0, 1, 2v)$

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = -2u\,\mathbf{i} + 2v\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

varav

$$\text{Arean} = \iint_D \sqrt{4u^2+4v^2+1}\,du\,dv = \left| \begin{array}{l} \text{Polära koordinater} \\ u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi \\ 0 \le r \le 3 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{4r^2+1} \cdot r\,d\varphi \right) dr = 2\pi \int_0^3 \sqrt{4r^2+1} \cdot r\,dr =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 4r^2+1 = t \\ dt = 8r\,dr \\ r=0 \Rightarrow t=1 \\ r=3 \Rightarrow t=37 \end{array} \right| = \frac{2\pi}{8} \int_1^{37} \sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{6}\left(37^{3/2}-1\right)$$

(b) Vi använder sfäriska koordinater:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le R \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\iiint_K (1+z)\,dV = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} (1+R\cos\theta) R^2 \sin\theta \, d\theta \right) d\varphi \right) dR =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} (R^2\sin\theta + R^3 \underbrace{\cos\theta\sin\theta}_{\frac{1}{2}\sin(2\theta)}) \, d\theta \right) d\varphi \right) dR =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \left[-R^2\cos\theta - \frac{1}{4}R^3\cos(2\theta) \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\varphi \right) dR =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(R^2 + \frac{R^3}{2} \right) dR = \frac{11}{48}\pi$$

4(B)

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ -9 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2, \ \lambda = 1$$

Egenvärdena blir alltså $\lambda = 1$ och $\lambda = 2$.

Vi söker nu respektive egenvektorer:

$\lambda = 1$: $A - I = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -9 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Lösningarna till $(A-I)x = 0$ ges av

$x_2 = t$ - fri, $x_3 = 0$, $x_1 = t/3$

dvs $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

De samtliga egenvektorerna till $\lambda = 1$ ges av

$$t\begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ t \neq 0.$$

$\lambda = 2$: $A - 2I = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -9 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$x_3 = t$ - fri, $x_1 = 0$, $x_2 = t$

Egenvektorerna till $\lambda = 2$ ges av

$$t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \neq 0$$

Matrisen är inte diagonaliserbar eftersom det finns max två linjärt oberoende egenvektorer

5. Vi löser systemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x\sin y \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2\cos y - 2ye^z \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = -y^2e^z \end{cases}$$

Ur 1^a ekvationen får man

$$\varphi(x,y,z) = \int 2x\sin y \, dx = x^2\sin y + C(y,z)$$

Vi sätter in detta uttryck i 2^a ekvationen och får

$$x^2\cos y + \frac{\partial}{\partial y} C(y,z) = x^2\cos y - 2ye^z$$

varav $\dfrac{\partial C}{\partial y} = -2ye^z$

och $C(y,z) = \int(-2ye^z)\,dy = -y^2e^z + D(z)$

Uttrycket för φ blir alltså

$$\varphi(x,y,z) = x^2\sin y - y^2e^z + D(z)$$

Stoppa in detta i 3^e ekv. i systemet:

$$-y^2e^z + D'(z) = -y^2e^z$$

varav $D'(z) = 0$ och $D(z) = \text{const}$

En potential ges av

$$\varphi(x,y,z) = x^2\sin y - y^2e^z$$

$$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = \varphi(1,0,1) - \varphi(0,1,1) = +e.$$

6. En ~~normalvektor~~ till kurvan $x=g(y)$ i punkt (x,y) ges av $(1, -g'(y))$

En normalvektorvektor till nivåkurvan till $f(x,y) = 2y^4 + x$ i (x,y) ges av

$$\nabla f(x,y) = (1, 8y^3)$$

Enligt uppgiften måste de två vektorerna vara ~~[illegible]~~ ortogonala mot varandra: $(1, 8y^3)\cdot(1, -g'(y)) = 0$

varav ~~[illegible]~~ $g'(y) = (8y^3)^{-1}$

varav ~~[illegible]~~ $g(y) = -\frac{y^{-2}}{16} + C$

Att $x = g(y)$ går genom $(3, 1)$ ger

~~[illegible]~~ $3 = -\frac{1}{16} + C$

$C = \frac{49}{16}$

<u>Svar</u> ~~[illegible]~~ $x = -\frac{y^{-2}}{16} + \frac{49}{16}$

7. Man skall minimera/maximera $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ under bivillkoren

$$\underbrace{z - x^2 - y^2}_{g_1(x,y,z)} = 0 \quad \text{och} \quad \underbrace{x+y+z-12}_{g_2(x,y,z)} = 0$$

Först argumenterar vi att min/max finns. För detta räcker det att visa att skärningen är begränsad.
Skärningen ges av

$$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ x+y+z=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2+y^2 \\ x+y+x^2+y^2=12 \end{cases}$$ som efter

kvadratkompletteringen ger

$$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ (x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2 = \frac{25}{2} \end{cases}$$

Vi har att projektionen på xy-planet är en cirkel av radie $5/\sqrt{2}$ och centrum i $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ och därmed begränsad.

Lagranges metod innebär att

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \nabla f \\ \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \end{vmatrix} = 0 \\ g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ -2x & -2y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ z = x^2+y^2 \\ x+y+z=12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2z+1 \\ -2x & -2y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ z = x^2+y^2 \\ x+y+z=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2z+1)(2y-2x) = 0 \\ z = x^2+y^2 \\ x+y+z=12 \end{cases}$$

Ur 1^a ekvationen: $z = -\frac{1}{2}$ eller $x = y$

Insättning i 2^a ekv av $z = -\frac{1}{2}$ ger
$x^2 + y^2 = -\frac{1}{2}$ som är omöjligt.

Fall: $x = y$.

Insättning i systemet ger

$$\begin{cases} z = 2x^2 \\ 2x + z = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x^2 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$$

med lösningar $x = -3$, $z = 18$
$x = 2$, $z = 8$

Vi har alltså punkterna $(-3, -3, 18)$ och $(2, 2, 8)$

$f(-3, -3, 18) = (-3)^2 + (-3)^2 + 18^2 = 342$
$f(2, 2, 8) = 2^2 + 2^2 + 8^2 = 72.$

Så 342 måste vara det största avståndet från origo och 72 det minsta.