

# MVE470, MVE351 Flervariabelanalys vt 17

## Vecko-PM läsvecka 2

Adams: 12.3, 12.4, 12.5, 12.6

**Innehåll:** Partiella derivator. Högre ordningens derivator, Kedjeregeln, linjär approximation, differentierbarhet.

Kapitel 12 handlar om funktioner av flera variabler. I veckans avsnitt skall vi arbeta med en del begrepp som är välkända från envariableanalysen men nu i en mer generell tappning. I huvudsak handlar det om att derivera funktioner av flera variabler och använda derivata för att på olika sätt beskriva och approximera sådana funktioner. Derivatans av en reellvärd funktion  $f(x)$  av en variabel i en punkt  $x_0$  mäter hur "snabbt/långsamt" funktionsvärdena förändras i en omgivning av  $x_0$  och man vill att derivatan skall ha samma betydelse även för funktioner  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  av flera variabler. Det är dock inte givet hur man skall mäta denna förändring eftersom vi i omgivning av en punkt i  $\mathbb{R}^n$  har oändligt många riktningar att ta hänsyn till. De *partiella derivatorna* mäter förändringshastigheten i axelparallella riktningar och med dessa, samlade i en vektor som kallas *gradienten*, kan vi sedan enkelt bestämma förändringshastigheten i alla andra riktningar genom s.k. *riktningsderivata* som vi går igenom nästa vecka. I många situationer behöver man kunna hantera sammansättningar av funktioner, t.ex. vid variabelbyten, och för att derivera sådana sammansättningar finns en *kedjeregeln*, liknande den för funktioner av en variabel. Första ordningens derivator innehåller värdefull information om en funktions beteende och med dess hjälp kommer vi bl.a. beräkna approximativa funktionsvärden, genom *linjäriseringen* eller *differentialen*, och bestämma *tangentplan* till funktionsytor och nivåytor. Vi kommer införa begreppet *differentierbar* vilket är den naturliga motsvarigheten till deriverbarhet för funktioner av en variabel. Vi skall även studera högre ordningens derivator och bl.a. se nästa vecka hur dom i *Taylorutveckling* tillsammans kan kombineras för att ge en bättre approximation av en funktion än vad linjärisering ger. Mycket av den naturvetenskapliga och tekniska forskningen under det förra århundradet präglades av linjära approximationer av mer komplexa problem. Mycket talar för att man i framtiden kommer behöva mer noggranna analyser som bygger på högre ordningens approximationer.

**Mål: För att bli godkänd på kursen skall du kunna:**

- definiera och beräkna partiella derivator (12.3)
- bestämma tangentplan och normallinje till ytan  $z = f(x, y)$  (12.3)
- beräkna partiella derivator av högre ordning genom att tillämpa deriveringsregler för funktioner av en variabel samt kedjeregeln (12.4, 12.5)
- beräkna linjärisering för en reellvärd funktion och utnyttja dessa till approximativ beräkning av funktionsvärden (12.6)
- beräkna Jacobimatrisen för en vektorvärd funktion och utnyttja denna till approximativ beräkning av funktionsvärden (12.6)

**För överbetyg skall du också kunna:**

- definiera begreppet partiell derivata och härleda tangentplanets ekvation (A:12.3)
- definiera begreppet differentierbar funktion (12.6).

- redogöra för relationerna mellan egenskaperna för en funktion: kontinuerlig, kontinuerliga partiella derivator samt differentierbar (12.6)
- formulera och bevisa kedjeregeln för  $g \circ f$  då  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  och  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  samt
- formulera kedjeregeln på matrisform för  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  då  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  och  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  (se sid. 709, 12.6).

### Rekommenderade uppgifter

| Avsnitt | Uppgifter                                  |
|---------|--------------------------------------------|
| 12.3    | 1, 3, 5, 8, 11, 13, 14, 17, <b>19</b> , 25 |
| 12.4    | 1, 3, 5, 10, <b>17</b>                     |
| 12.5    | 1, 6, 7, 9, 11, 15, <b>17</b> , 19         |
| 12.6    | 1, <b>3</b> , <b>20</b>                    |

”Tjocka” uppgifter skall räknas på tavlan.