

MVE470, MVE351, Flervariabelanalys, vt 17

Vecko–PM läsvecka 3

Adams: 12.7, 12.9, 13.1-13.3

Innehåll: Gradient och riktningsderivator. Taylorscheier. Extremvärden, extremvärde med bivillkor. Lagranges multiplikator metod.

Vi vet från förra veckan att de *partiella derivatorna* mäter förändringshastigheten i axelparallella riktningar och med dessa, samlade i en vektor som kallas *gradienten*, kan vi sedan enkelt bestämma förändringshastigheten i alla andra riktningar genom s.k. *riktningsderivata*. Den introduceras i delkapitel 12.7. I 12.9 går vi igenom *Taylorutveckling* av en funktion som ger en bättre approximation av en funktion än vad linjärisering (från förra veckan) ger.

Kapitel 13 handlar om tillämpningar av derivata. Framför allt kommer vi se på hur derivata kan användas för att lösa olika typer av optimeringsproblem, som beskrivs med funktioner av flera variabler. I avsnitt 13.1 ges tillräckliga villkor för existensen av extremvärden (max/min) och där beskrivs också var man skall leta för att finna dessa extremvärden. Lokala extremvärden kan t.ex. finnas i s.k. *stationära punkter*, där de partiella derivatorna är 0. Ofta kan man avgöra om en sådan stationär punkt är lokalt maximum eller minimum genom att studera funktionens andraderivator. I avsnittet finns enkla kriterier för att avgöra detta. I avsnitt 13.2 och 13.3 skall vi gå vidare och se på hur man kan hitta ev. *globala extrempunkter* dvs. det största och minsta värde som en funktion antar på ett givet område Ω . Sådana extremvärden behöver inte alltid existera men från Sats 13.1.2 vet vi att ett största och minsta värde alltid går att finna om området Ω är kompakt (dvs. slutet och begränsat). I sådana fall antar funktionen sitt största/minsta värde antingen i det inre av området eller på randen av området. Typiska kandidater på extrempunkter i det inre av området är de stationära punkterna, vilket vi redan tränat oss på att ta fram i avsnitt 13.1. Det nya, och ibland lite svårare problemet, är att bestämma extremvärdena på randen. Området kan begränsas av flera olika randbitar som var och en beskrivs av någon ekvation. Vi behöver alltså kunna bestämma största och minsta värde av en funktion (en s.k. målfunktion) under något bivillkor. För detta finns lite olika tekniker/metoder. Ibland kan man lösa ut en variabel (eller uttryck) ur bivillkoret och ersätta motsvarande uttryck i målfunktionen och ibland kan man parametrisera randen och ersätta variablerna i målfunktionen med motsvarande parametruttryck. I båda fallen (som studeras i avsnitt 13.2) kommer målfunktionen att bero på en variabel mindre och problemet reduceras till ett extremvärdesproblem av den typ vi studerade i avsnitt 13.1.

Lagranges multiplikatormetod introduceras i avsnitt 13.3. Problemet med att maximera/minimera funktioner under ett (eller flera) bivillkor omformuleras då till ett problem som innebär att man behöver lösa ett icke-linjärt ekvationssystem. Metoden har bl.a. fördelen att den lätt kan implementeras på en dator, som inte har några större problem med att numeriskt lösa sådana system. För hand kan det dock ofta vara svårt att lösa icke-linjära ekvationssystem exakt, men detta skall ställas mot svårigheterna med att parametrisera kurvor och ytor eller annan finurlig insikt som de övriga metoderna ibland kräver.

Mål: För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

- beräkna gradienter och riktningsderivator
- bestämma ekvationer för tangentlinje och normallinje till nivåkurva (se sats 12.7.6)

- beräkna Taylorpolynom av ordning två, till funktioner av två variabler, både genom att utgå från Taylors formel och genom att utnyttja kända Taylorpolynom i en variabel (jmf. exempel 1 och 2) (12.9).
- definiera begreppen lokalt minimum/maximum, sadelpunkt, globalt maximum/minimum, kritisk punkt och singulär punkt (13.1)
- bestämma kritiska/stationära punkter för $f(x, y)$ samt klassificera de kritiska punkterna med hjälp av sats 13.1.3 eller remark s.748 (13.1)
- tillämpa sats 13.1.1 för att bestämma största och minsta värde på kompakt mängd för $f(x, y)$ samt största och minsta värde på randen. (13.1, 13.2)
- tillämpa sats 13.1.1 för att bestämma största och minsta värde på kompakt mängd för $f(x, y)$ samt största och minsta värde på randen (13.2)
- bestämma extremvärden för $f(x, y)$, eller $f(x, y, z)$ under bivillkor $g(x, y) = 0$, eller $g(x, y, z) = 0$, med Lagranges multiplikatormetod då den leder till relativt enkelt ekvationssystem (13.3)

För överbetyg skall du också kunna:

- definiera begreppen gradient och riktningsderivata, redogöra för och bevisa deras egenskaper (sats 12.7.6, sats 12.7.7) samt markerad ruta s 718).
- bestämma kritiska/stationära punkter för $f(x, y)$, där ekvationssystemet $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ är mer komplicerade, samt klassificera de kritiska punkterna (13.1)
- lösa problem enligt godkänstmålen där ekvationssystemen inte är lika enkla (13.2)
- motivera Lagranges multiplikatormetod (13.3)

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Uppgifter
12.7	1, 3, 5, 21
12.9	1, 5, 7 (grad 2 räcker)
13.1	1, 3 , 7, 9 , 13, 22
13.2	1 , 3 , 5, 7, 11
13.3	1, 3 , 5 , 7, 9, 14

Extra uppgifter

1. Använd Lagranges multiplikatormetod för att bestämma största och minsta avståndet från ellipsen $13x^2 + 13y^2 + 10xy = 72$ till origo.

Tjocka uppgifter skall räknas på tavlan.