

MVE470, MVE351, flervariabelanalys vt 17

Vecko–PM läsvecka 5

Adams: 15.1-15.4

Innehåll: Vektorfält, konservativa vektorfält, kurvintegraler.

Denna vecka riktar vi vår uppmärksamhet åt kapitel 15 som till stor del handlar om *vektorfält* och dess tillämpningar (avs 15:1,2,4,6). Vektorfält dyker upp naturligt inom många områden (se sid 860) t.ex. för att beskriva olika typer av krafter (gravitation, magnetiska, elektrostatiska mm) eller flöden (av vätska, gas, energi mm). Per definition är ett vektorfält (i rummet) en funktion $\mathbf{F}$ från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ och en naturlig tolkning är att $\mathbf{F}(x, y, z)$, som alltså är en vektor i $\mathbb{R}^3$, beskriver hastigheten hos en partikel i ett visst flöde som befinner sig i punkten (x, y, z) . En partikel som rör sig i rummet med en hastighet som bestäms av ett visst vektorfält följer en kurvbana som kallas *fältlinje* (även kallad strömlinje eller kraftlinje, beroende på sammanhang).

I avsnitt 15.2 skall vi studera en speciell klass av vektorfält som kallas *konservativa*. Det är vektorfält $\mathbf{F}$ som är gradienten av någon reellvärd funktion $\phi(x, y, z)$ dvs. $\mathbf{F} = \nabla\phi$. Funktionen ϕ sägs i så fall vara en (skalär) *potential* till vektorfältet. Som vi skall se har sådana konservativa vektorfält flera användbara egenskaper, och de spelar en viktig roll i teorin om vektorfält. Avsnitt 15.4 innehåller några viktiga tillämpningar på vektorfält. Vi skall bl.a. se hur man med en s.k. *kurvintegral* (även kallad linjeintegral) kan beräkna det arbete som ett visst kraftfält utför på en partikel som rör sig utefter en given kurva i rummet. Även i nästa vecka skall vi analysera vektorfält då avsnitt 15.5, 15.6 och kapitel 16 står på agendan. Utöver ovan nämnda innehåll, där vektorfält spelar en central roll, så kommer vi denna vecka även rikta uppmärksamhet åt avsnitt 15.3 som innehåller några andra viktiga tillämpningar på integraler. I avsnitt 15.3 skall vi se hur man kan beräkna massa och tyngdpunkt av en tunn (krökt) tråd som är belagd med en given (varierande) densitet.

Mål: För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

- skissa ett vektorfält i planet, skissa fältlinjer till det och redogöra för sambandet mellan vektorfält och fältlinjer (15.1)
- bestämma fältlinjer till vektorfält i planet (15.1)
- definiera begreppet konservativt vektorfält i ett område och beräkna potential till ett konservativt fält (15.2)
- känna till nödvändiga villkor för att ett vektorfält skall vara konservativt (sid. 851) och med hjälp av dessa kunna visa att ett givet vektorfält inte är konservativt vektorfält (15.2)
- förklara sambandet mellan nivåkurvor till potential och fältlinjerna till ett konservativt vektorfält (15.2)
- definiera begreppet kurvintegral av ett vektorfält och beräkna sådana integraler (15.3)
- formulera och tillämpa satsen om kurvintegralens oberoende av integrationsvägen (15.4)

- tillämpa kurvintegral för att bestämma t.ex. längd, arbete (15.3-4)(se t.ex. övn 15.3.5, 15.4.7)

För överbetyg skall du också kunna:

- bestämma fältlinjer till vektorfält i planet (15.1)
- definiera begreppen *område*, *sammanhängande område* och *enkelt sammanhängande område* (15.4).

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Uppgifter
A.15.1	1, 3 , 5
A.15.2	1, 3, 5 , 9
A.15.3	1, 3 , 5
A.15.4	1 , 3, 5, 7 , 15

Tjocka uppgifter skall visas på tavlan.

Extra uppgifter

- Låt $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ vara ett vektorfält i $\mathbb{R}^2$.
 - Bestäm fältlinjerna till vektorfältet $\mathbf{F}$.
 - Visa att $\mathbf{F}$ är ett konservativt vektorfält genom att beräkna en potential ϕ till $\mathbf{F}$.
 - Skissa några fältlinjer samt några nivåkurvor till ϕ . Vad finns det för samband mellan nivåkurvorna och fältlinjerna?
- Låt C vara den moturs orienterade cirkeln $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$. Låt

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$$

vara ett vektorfält i $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. Beräkna kurvintegralen $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ genom att använda kurvintegralens definition.

- Vilket av följande vektorfält är konservativt? Hitta en potential för det konservativa vektorfältet

$$(a) \mathbf{F}_1(x, y) = (2xy + 2x)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} \quad (b) \mathbf{F}_2(x, y) = 2xe^y\mathbf{i} + (x^2e^y + x)\mathbf{j}$$

- Räkna ut integralen $\oint_C \mathbf{F}_2(x, y)dr$, där C är en positivt orienterad cirkel med centrum i $(1, 1)$ och radien 1.