Tentamen
MVE470/MVE351 Flervariabelanalys, K/Kf/Bt/Ki

2018-03-16 , 14.00 - 18.00

Examinator: Thomas Wernstål , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Maximilian Thaller , telefon: 5325

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen), inklusive eventuella bonuspoäng från duggor 2018.

För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar, inklusive eventuella bonuspoäng.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. (10p)
Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.

2. Låt $f(x,y) = xy - 3x - y$

(a) Bestäm alla kritiska punkter till $f(x,y)$ och avgör om de är lokala minima, lokala maxima eller sadelpunkter. (3p)

(b) Bestäm största och minsta värdet av f på området $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$ (3p)

3. Låt D vara det område i xy-planet som begränsas av parabeln $y = x^2$ och linjen $y = 1$. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D y\,dA$ genom att dels först integrera i x-led och därefter i y-led, samt även i den omvända ordningen dvs. först i y-led och därefter i x-led. (4p)

4. (a) Ange sambanden mellan Cartesiska koordinater och sfäriska koordinater, samt ange de sfärsiska koordinaterna för den punkt som i Cartesiska koordinater är $(-1,0,0)$. (2p)

(b) Beräkna trippelintegralen $\iiint_K z\,dV$ då K är halvklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$ (4p)

5. Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z-1)\mathbf{k}$ och låt Ω vara det område som begränsas av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ och xy-planet.

(a) Beräkna det totala flödet av $\mathbf{F}$ ut ur området Ω genom att parametrisera de två begränsningsytorna och beräkna motsvarande ytintegraler utifrån definitionen. (3p)

(b) Beräkna det totala flödet av $\mathbf{F}$ ut ur området Ω genom att använda Gauss's divergenssats. (3p)

Del 2: Överbetygsdelen

Uppgifterna på denna del motsvarar lärmålen för överbetyg, men eventuella poäng från denna del får räknas in i totalpoängen på tentan, oavsett resultat på godkäntdelen.

6. Avgör om följande två gränsvärden existerar eller ej och bestäm, i förekommande fall, deras värde (tydlig motiveringen krävs!) (4p)

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

7. Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$ och låt $\mathcal{C}$ vara skärningskurvan mellan cylindern $x^2+y^2=4$ och planet $x+z=3$, orienterad moturs sett uppifrån längs z-axeln.

(a) Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F}\bullet d\boldsymbol{r}$ genom att parametrisera kurvan $\mathcal{C}$ och beräkna kurvintegralen utifrån definitionen av kurvintegral. (3p)

(b) Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F}\bullet d\boldsymbol{r}$ genom att använda Stokes sats. (3p)

8. (a) Bevisa att värdet på en kurvintegral $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ bara beror på vektorfältet $\mathbf{F}$, samt start och slutpunkt för kurvan $\mathcal{C}$, om vektorfältet $\mathbf{F}$ är konservativt. (4p)

(b) Visa att div (curl $\boldsymbol{F}$) $= 0$ för alla glatta vektorfält $\boldsymbol{F}$ i $\mathbb{R}^3$. (2p)

(c) Bestäm fältlinjen till vektorfältet $\mathbf{F} = \nabla(x^2+2y^2)$ genom punkten $(2,1)$. (2p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Anonym kod	MVE470/MVE351 Flervariabelanalys, K/Kf/Bt/Ki	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm riktningsderivatan av funktionen $f(x, y) = y^2 + 2xy - x^3$ i punkten $(2, 1)$ och i riktningen $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Antag att f är en reellvärd funktion av tre variabler. Uttryck $\dfrac{\partial}{\partial t} f(st, 2s, 3t)$ i de partiella derivatorna av f. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till funktionen $f(x, y) = \ln(x + 2y)$ i punkten $(1, 0)$ och använd detta Taylorpolynom för att bestämma en approximation av funktionsvärdet $f(1.1, 0.2)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Punkten $P = (4, 3, 2)$ ligger på den yta S som ges av parameteriseringen $\mathbf{r}(u, v) = u^2\mathbf{i} + (u + v^2)\mathbf{j} + uv^3\mathbf{k}, 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 3$. Bestäm en normalvektor till ytan S i punkten P. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Formelblad för MVE470/MVE351, läsåret 17/18

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x} \, dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a - x^2} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a - x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} \, dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2 + a} \, dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + a} + a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.