Tentamen
MVE470/MVE351 Flervariabelanalys, K/Kf/Bt/Ki

2018-06-08 , 08.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Felix Held , telefon: 5325

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen), inklusive eventuella bonuspoäng från duggor 2018.

För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar, inklusive eventuella bonuspoäng.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. (10p)
Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.

2. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = 2x^4 - 2y^2 - x$ på det område som begränsas av kurvorna $y = x^2 - 1$ och $y = 1 - x^2$. (5p)

3. (a) Förklara (med en formel) vad som menas med medelvärde av en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ på ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$. (1p)

(b) Bestäm medelavståndet från origo till punkterna på cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 2$. (4p)

4. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F} = (8x^2 - y^2)\mathbf{i} + (2x^2 + y)\mathbf{j}$ och låt $\mathcal{C}$ vara randkurvan till triangeln med hörn i $(0, 0), (2, 0)$, och $(0, 4)$ orienterad moturs. Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ genom att...

(a) parametrisera randbitarna och utgå från definitionen av kurvintegral. (3p)

(b) använda Greens sats. (3p)

5. Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet $\mathbf{F} = (y^2 - ze^{-xyz})\mathbf{i} + xe^{z^2}\mathbf{j} + ye^{xy}\mathbf{k}$ och låt K vara det kubiska området där $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

(a) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom den sida av K där $z = 1$. (2p)

(b) Använd Gauss's divergenssats för att beräkna det totala flödet av $\mathbf{F}$ ut ur kuben K. (4p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Uppgifterna på denna del motsvarar lärmålen för överbetyg, men eventuella poäng från denna del får räknas in i totalpoängen på tentan, oavsett resultat på godkändelen.

6. Låt $\mathcal{C}$ vara skärningskurvan mellan paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $x + y + 2z = 2$. Bestäm de punkter på $\mathcal{C}$ som ligger närmast respektive längst bort från origo. (6p)

7. Låt $\mathcal{C}_\epsilon$ vara skärningskurvan mellan sfären $x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon^2$ (där ϵ är ett fixt positivt tal) och planet $x + y + z = 0$, orienterad medurs sett uppifrån. Beräkna cirkulationen $\int_{\mathcal{C}_\epsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ av hastighetsfältet $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ runt $\mathcal{C}_\epsilon$. Beräkna speciellt gränsvärdet;

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \int_{\mathcal{C}_\epsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

(6p)

8. (a) Definiera begreppet gränsvärde av en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (2p)

(b) Härled tangentplanets ekvation till $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$ (4p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Anonym kod	MVE470/MVE351 Flervariabelanalys, K/Kf/Bt/Ki	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm gradienten av funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$ i punkten $(2, 1)$. Skissa också nivåkurvan till $f(x, y)$ genom $(2, 1)$ och rita ut gradientvektorn i samma figur. (2p)

Lösning & skiss:

Svar: ....

(b) Antag att $f(x)$ är en funktion av en variabel med kontinuerlig andraderivata och att $c \neq 0$ är en konstant. Visa då att funktionen $g(x, t) = f(x - ct) + f(x + ct)$ uppfyller den så kallade vågekvationen (2p)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$

Lösning:

(c) Bestäm en parametrisering av den del av cirkeln $x^2 + y^2 = 5$ som ligger i första kvadranten. Antag att din parametrisering beskriver rörelsen hos en partikel. Vad är då partikelns fart i punkten $(1, 2)$? (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Visa att vektorfältet $\mathbf{F} = yz\,\mathbf{i} + (xz + z)\mathbf{j} + (xy + y + 1)\mathbf{k}$ är virvelfritt (irrotational) och bestäm en potential till $\mathbf{F}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Formelblad för MVE470/MVE351, läsåret 17/18

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.