Anonym kod	MVE470/MVE351 Flervariabelanalys, K/Kf/Bt/Ki	sid.nummer 1	Poäng

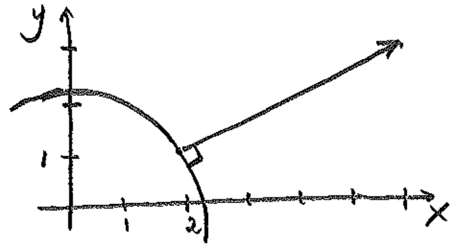
1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm gradienten av funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2$ i punkten $(2,1)$. Skissa också nivåkurvan till $f(x,y)$ genom $(2,1)$ och rita ut gradientvektorn i samma figur. (2p)

Lösning & skiss:

$\nabla f = (2x, 2y)$

$\nabla f(2,1) = (4,2)$



Svar: ....

(b) Antag att $f(x)$ är en funktion av en variabel med kontinuerlig andraderivata och att $c \neq 0$ är en konstant. Visa då att funktionen $g(x,t) = f(x-ct) + f(x+ct)$ uppfyller den så kallade vågenkvationen (2p)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$

Lösning:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= f''(x-ct) + f''(x+ct) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} &= c^2 f''(x-ct) + c^2 f''(x+ct) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$

(c) Bestäm en parametrisering av den del av cirkeln $x^2 + y^2 = 5$ som ligger i första kvadranten. Antag att din parametrisering beskriver rörelsen hos en partikel. Vad är då partikelns fart i punkten $(1,2)$? . (3p)

Lösning:

$\mathbf{r}(t) = \sqrt{5}\cos t\,\mathbf{i} + \sqrt{5}\sin t\,\mathbf{j}$

$\mathbf{r}'(t) = -\sqrt{5}\sin t\,\mathbf{i} + \sqrt{5}\cos t\,\mathbf{j}$

$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{5\sin^2 t + 5\cos^2 t} = \sqrt{5}$

Svar: Med parametriseringen ovan håller partikeln den konstanta farten $\sqrt{5}$

(d) Visa att vektorfältet $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + (xz+z)\mathbf{j} + (xy+y+1)\mathbf{k}$ är virvelfritt (irrotational) och bestäm en potential till $\mathbf{F}$. (3p)

Lösning:

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = yz \Rightarrow \phi = xyz + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = \cancel{xz} + g_1(y,z) = \cancel{xz} + z \Rightarrow$

$g_1(y,z) = z \Rightarrow g(y,z) = yz + h(z)$

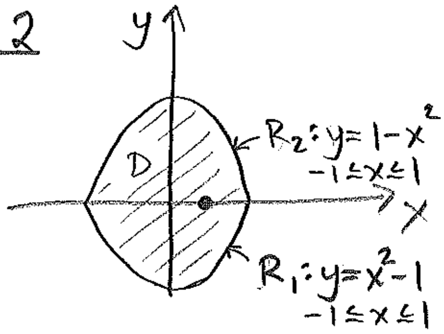
$\frac{\partial \phi}{\partial z} = xy + y + h'(z) = xy + y + 1 \Rightarrow h'(z) = 1 \Rightarrow h(z) = z + C$

Detta visar att $\mathbf{F}$ är konservativt med potential

Svar: .... $\phi(x,y,z) = xyz + yz + z + C$ ....

Eftersom varje konservativt fält är virvelfritt (en). (h) i Sats 3 i avs. 16.2) så följer också att $\mathbf{F}$ är virvelfritt.

Uppg 2



Eftersom f saknar singulariteter måste extremvärdena antas i kritiska punkter i det inre av D (I) eller på randen av D (II) (dvs. $R_1 \cup R_2$ i figur)

(I) $\nabla f = (8x^3 - 1)\mathbf{i} - 4y\mathbf{j} = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (\tfrac{1}{2}, 0) \in D$

$f(\tfrac{1}{2}, 0) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{-3}{8}}}$

(II) $R_1: y = x^2 - 1, \ -1 \le x \le 1$:

$g_1(x) = f(x, x^2-1) = 2x^4 - 2(x^2-1)^2 - x = 4x^2 - x - 2$

$g_1'(x) = 8x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{8}$ ← obs! ligger i intervallet $-1 \le x \le 1$

$g_1(\tfrac{1}{8}) = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - 2 = \underline{\underline{\frac{-33}{16}}}$

Eftersom $f(x, 1-x^2) = f(x, x^2-1)$ kommer vi få samma extremvärde på R_2.

Vi måste också kontrollera värdena i "hörnpunkterna"

$f(1,0) = \underline{\underline{1}}$ och $f(-1,0) = \underline{\underline{3}}$

<u>Svar</u>: Funktionens största värde på det angivna området är 3 och det minsta är $\frac{-33}{16}$

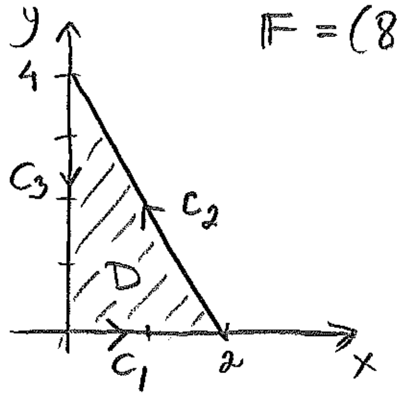
Uppg 3 a) Medelvärdet $\bar{f}$ av en funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ på området $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ges av;

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{arean av } D} \iint_D f(x,y)\,dA$$

b) Medelavståndet $= \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iint_{x^2+y^2 \le 2} \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\substack{\text{avståndet} \\ \text{till origo}}}\,dx\,dy =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}} r^2\,dr \right) d\theta = \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{2}}{3}}}$$

Uppg 4



$\mathbb{F} = (8x^2 - y^2)\,\mathbf{i} + (2x^2 + y)\,\mathbf{j}$

$C_1 : \mathbf{r}(t) = (t, 0)$, $0 \le t \le 2$

$C_2 : \mathbf{r}(t) = (2-t, 2t)$, $0 \le t \le 2$

$C_3 : \mathbf{r}(t) = (0, 4-t)$, $0 \le t \le 4$

a) $$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} =$$

$$= \int_0^2 \underbrace{(8t^2, 2t^2)}_{\mathbb{F}(\mathbf{r}(t))} \cdot \underbrace{(1, 0)}_{\mathbf{r}'(t)}\,dt + \int_0^2 (32 - 32t + 4t^2, 8 - 6t + 2t^2) \cdot (-1, 2)\,dt$$

$$+ \int_0^4 (-(4-t)^2, 4-t) \cdot (0, -1)\,dt = \int_0^2 8t^2\,dt + \int_0^2 (20t - 16)\,dt +$$

$$+ \int_0^4 (t-4)\,dt = \left[\frac{8}{3} t^3 \right]_0^2 + \left[10t^2 - 16t \right]_0^2 + \left[\frac{t^2}{2} - 4t \right]_0^4 = \frac{64}{3} + 8 - 8 = \underline{\underline{\frac{64}{3}}}$$

b)

$$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D (4x+2y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{4-2x} (4x+2y)\,dy \right) dx = \int_0^2 \left[4xy + y^2 \right]_0^{4-2x} dx =$$

$$= \int_0^2 \left(4x(4-2x) + (4-2x)^2\right) dx = \int_0^2 (16 - 4x^2)\,dx = \left[16x - \tfrac{4}{3}x^3\right]_0^2 = \underline{\underline{\frac{64}{3}}}$$

<u>Uppg 5</u> a)

$z = 1$

$0 \le x, y \le 1$

$$\iint_S \mathbb{F}\cdot \hat{\mathbb{N}}\,dS = \iint_{0\le x,y\le 1} \underbrace{(y^2 - e^{-xy}, xe^{x^2}, ye^{xy})}_{\mathbb{F} \text{ på } S} \cdot \underbrace{(0,0,1)}_{\hat{\mathbb{N}} \text{ på } S} \underbrace{dx\,dy}_{dS \text{ på } S} =$$

$$= \iint_{0\le x,y\le 1} y e^{xy}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 y e^{xy}\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[e^{xy} \right]_0^1 dy =$$

$$= \int_0^1 (e^y - 1)\,dy = \left[e^y - y \right]_0^1 = e - 1 - 1 = \underline{\underline{e-2}}$$

b)

$$\iint_{\partial K} \mathbb{F}\cdot \hat{\mathbb{N}}\,dS = \iiint_K \operatorname{div} \mathbb{F}\,dV =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 y z^2 e^{-xyz}\,dx \right) dy \right) dz =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[-z e^{-xyz} \right]_0^1 dy \right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^1 z - z e^{-yz} \right) dy \Big) dz =$$

$$= \int_0^1 \left[yz + e^{-yz} \right]_0^1 dz = \int_0^1 (z + e^{-z} - 1)\,dz =$$

$$= \left[\frac{z^2}{2} - e^{-z} - z \right]_0^1 = \frac{1}{2} - e^{-1} - 1 + 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2} - \frac{1}{e}}}$$

Uppg 6 Vi söker max och min av funktionen $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ under bivillkoren $g_1=g_2=0$ där $g_1(x,y,z)=z-x^2-y^2$ och $g_2(x,y,z)=x+y+2z-2$.
Lagrange multiplikatormetod ger;

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g_1}{\partial x}+\mu\frac{\partial g_2}{\partial x} \Rightarrow 2x=-2\lambda x+\mu & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g_1}{\partial y}+\mu\frac{\partial g_2}{\partial y} \Rightarrow 2y=-2\lambda y+\mu & (2) \\ \frac{\partial f}{\partial z}=\lambda\frac{\partial g_1}{\partial z}+\mu\frac{\partial g_2}{\partial z} \Rightarrow 2z=\lambda+2\mu & (3) \\ g_1(x,y,z)=z-x^2-y^2=0 & (4) \\ g_2(x,y,z)=x+y+2z-2=0 & (5) \end{cases}$$

(1) och (2) ger att $2(x-y)=-2\lambda(x-y)$ så vi måste antingen ha $x=y$ eller $\lambda=-1$

Fall 1 $x=y$ som insatt i (4) och (5) ger;

$$\begin{cases} z=2x^2 \\ 2x+2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x-1=0 \\ z=1-x \end{cases}$$

vilket ger oss lösningarna;

$(x,y,z)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ och $(x,y,z)=(-1,-1,2)$

$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$, $f(-1,-1,2)=6$

Fall 2 $\lambda=-1$ som insatt i (1) ger $\mu=0$ vilket insatt i (3) ger; $2z=-1$ dvs. $z=\frac{-1}{2}$
Men detta ger ingen lösning på (4) så detta fall ger inga ytterligare lösningar

Svar: $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ är den punkt på skärningskurvan som ligger närmast origo, och $(-1,-1,2)$ ligger längst bort.

Uppg 7 Kurvan C_ε är randkurva till cirkelskivan S_ε i planet $x+y+z=0$, med centrum i origo och radie ε. Vi har;

$$\operatorname{curl} \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\mathbb{i}-\mathbb{j}-\mathbb{k}$$

och C_ε har positiv orientering m.a.p. den nedåtriktade normalen till ytan S_ε dvs.

$$\hat{\mathbb{N}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}(\mathbb{i}+\mathbb{j}+\mathbb{k})$$

så Stokes sats ger;

$$\int_{C_\varepsilon} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \iint_{S_\varepsilon} \operatorname{curl}\mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS = \sqrt{3}\iint_{S_\varepsilon} dS = \underline{\underline{\sqrt{3}\pi\varepsilon^2}}$$

Speciellt får vi att;

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int_{C_\varepsilon} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$