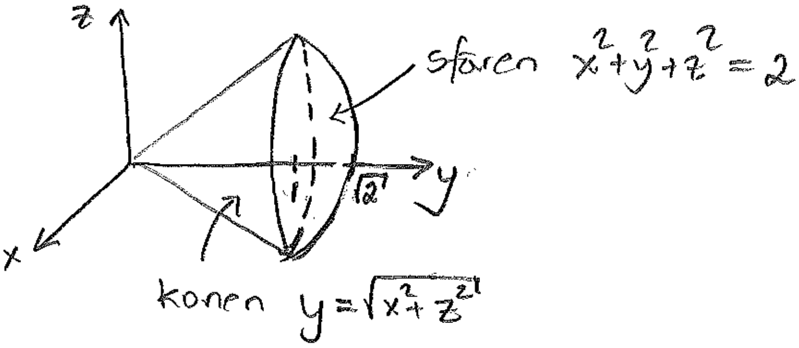
Lösningsförslag till tentan på MVE470/MVE351 den 31 aug 2018

Uppg 1a $\text{grad}(xye^y - z) = (ye^y, x(1+y)e^y, -1)$

I punkten $(1,0,0)$ får vi spec. $(0,1,-1)$

Svar: t.ex. $(0,1,-1)$

Uppg 1b



Uppg 1c Svar $\mathbf{r}(t) = \frac{3}{2}\cos t\,\mathbf{i} + 3\sin t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{9}{4}\sin^2 t + 9\cos^2 t}\,dt$$

Uppg 1d $Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & z & y \\ -\ln z & 2y & -x/z \end{bmatrix}$, $Df(2,2,1) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

$$f(1.98, 2.01, 1.03) \approx f(2,2,1) + Df(2,2,1)\begin{bmatrix} -0.02 \\ 0.01 \\ 0.03 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.01 \\ -0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.99 \\ 3.98 \end{bmatrix}$$

Svar: $f(1.98, 2.01, 1.03) \approx (5.99, 3.98)$

Uppg 2 b) $f_1 = \dfrac{y(2+x^4+y^4) - 4x^4y}{(2+x^4+y^4)^2}$, $f_1(1,1) = 0$, $f_1(0,0) = 0$

Av symmetriskäl är även $f_2(1,1) = 0$, $f_2(0,0) = 0$

Således är både $(1,1)$ och $(0,0)$ kritiska punkter.

$$f_{11} = \frac{4x^3y - 16x^3y}{(2+x^4+y^4)^2} - \left(y(2+x^4+y^4) - 4x^4y\right)\frac{8x^3}{(2+x^4+y^4)^3}$$

$$f_{12} = \frac{2+x^4+5y^4-4x^4}{(2+x^4+y^4)^2} - \left(y(2+x^4+y^4) - 4x^4y\right)\frac{8y^3}{(2+x^4+y^4)^3}$$

$f_{11}(1,1) = \frac{-3}{4}$, $f_{12}(1,1) = \frac{1}{4}$

Av symmetriskäl är även $f_{22}(1,1) = \frac{-3}{4}$

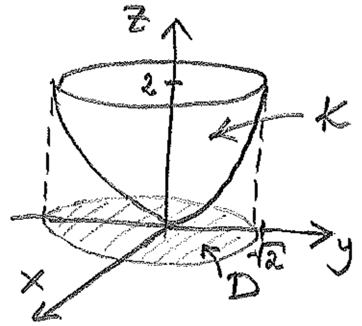
$$\begin{vmatrix} f_{11}(1,1) & f_{12}(1,1) \\ f_{21}(1,1) & f_{22}(1,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3/4 & 1/4 \\ 1/4 & -3/4 \end{vmatrix} = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2} > 0$$

Eftersom även $f_{11}(1,1) = \frac{-3}{4} < 0$ så följer att f har ett lokalt maximum i $(1,1)$

Då $f_{11}(0,0) = f_{12}(0,0) = 0$ så säger samma kriterium inget om karaktären i $(0,0)$

Men vi ser direkt att $f(x,y) > 0 = f(0,0)$ första kvadranten och att $f(x,y) < 0 = f(0,0)$ andra kvadranten, vilket visar att f har en sadelpunkt i $(0,0)$.

Uppg 3 a)



$$\text{Volymen} = \iint_D \left(2-(x^2+y^2)\right)dx\,dy =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} (2-r^2)\,r\,d\theta \right) dr = 2\pi \left[r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = \underline{\underline{2\pi}}$$

b) Låt (x_T, y_T, z_T) vara kroppens masscentrum
Av symmetriskäl är $x_T = y_T = 0$
Vidare är;

$$\iiint_K z\,dV = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{2} z\,dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_D \left[\frac{z^2}{2} \right]_{x^2+y^2}^{2} dx\,dy = \iint_D \left(2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2\right) dx\,dy =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(2 - \frac{1}{2} r^4\right) r\,d\theta \right) dr = 2\pi \left[r^2 - \frac{r^6}{12} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{8\pi}{3}$$

så om densiteten $\delta(x,y,z) = C$ så är;

$$z_T = \frac{\iiint_K z\,\delta(x,y,z)\,dV}{\iiint_K \delta(x,y,z)\,dV} = \frac{\cancel{C}\iiint_K z\,dV}{\cancel{C}\iiint_K dV} = \frac{8\pi/3}{2\pi} = \frac{4}{3}$$

<u>Svar</u>: Kroppens masscentrum är $(0, 0, \frac{4}{3})$

Uppg 4 a) Arbetet $= \int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_0^1 \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \cdot \mathbb{r}'(t)\,dt =$

$$= \int_0^1 \left(-(t^3-t)(2t-1) + (t^2-t)(3t^2-1)\right)dt =$$

$$= \int_0^1 (t^4 - 2t^3 + t^2)\,dt = \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{2} + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{30}}}$$

b) Arean $= \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy = \frac{1}{2}\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \underline{\underline{\frac{1}{60}}}$

Uppg 5 a) Låt S_T och S_B beteckna de cirkelskivor som utgör toppen resp. botten av cylindern C.

$$\iint_{S_T} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\,dS = \iint_{S_T} 3\,dS = 3\iint_{S_T} dS = \underline{\underline{3\pi a^2}}$$

$\hat{\mathbb{N}} = \mathbb{k}$ på S_T

$\mathbb{F} = x\mathbb{i} + y\mathbb{j} + 3\mathbb{k}$ på S_T

S_T: cirkelskiva med radie a

$$\iint_{S_B} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\,dS = \iint_{S_B} 3\,dS = \underline{\underline{3\pi a^2}}$$

$\hat{\mathbb{N}} = -\mathbb{k}$ på S_B

som ovan

$\mathbb{F} = x\mathbb{i} + y\mathbb{j} - 3\mathbb{k}$ på S_B

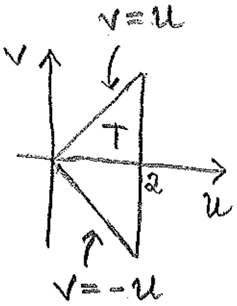
b) Låt S_M beteckna mantelytan till cylindern C. Gauss sats ger att;

$$\iint_{S_M} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\,dS = \iiint_C \underbrace{\operatorname{div}\mathbb{F}}_{3}\,dV - \iint_{S_T} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\,dS - \iint_{S_B} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\,dS =$$

$$= 3\underbrace{\iiint_C dV}_{\text{Volymen av } C} - 3\pi a^2 - 3\pi a^2 = 3 \cdot 6\pi a^2 - 6\pi a^2 = \underline{\underline{12\pi a^2}}$$

Uppg 6 Vi gör variabelbytet $u = y+x$ och $v = y-x$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$



Triangeln D avbildas på triangeln T i uv-planet med hörn i (0,0), (2,2) och (2,-2) så

$$\iint_D e^{(y-x)/(y+x)}\,dx\,dy = \iint_T e^{v/u}\frac{1}{2}\,du\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2\left(\int_{-u}^{u} e^{v/u}\,dv\right)du = \frac{1}{2}\int_0^2 \left[u e^{v/u}\right]_{-u}^{u} du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 u(e-e^{-1})\,du = \frac{e-e^{-1}}{2}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^2 = \underline{\underline{e-e^{-1}}}$$

Uppg 7 a) Beteckna halvsfären $x^2+y^2+z^2=4$, $z \geq 0$ med S.

$$\text{curl}\,\mathbb{F} = \nabla \times \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -2xz & x^2-y^2 \end{vmatrix} = (2x-2y)\mathbb{i} - 2x\mathbb{j} - (2z+3)\mathbb{k}$$

$$\iint_S \text{curl}\,\mathbb{F}\bullet \underbrace{\hat{\mathbb{N}}}_{=\frac{1}{2}(x,y,z) \text{ på } S}\,dS = \iint_S \frac{1}{2}(2x^2-4xy-2z^2-3z)\,dS = -3\iint_S \frac{z}{2}\,dS$$

av symmetriskäl är

$$\iint_S xy\,dS = 0 \quad \text{och}$$

$$\iint_S x^2\,dS = \iint_S z^2\,dS$$

$$= -3\iint_{x^2+y^2\leq 4} dx\,dy = \underline{\underline{-12\pi}}$$

$dS = \frac{2}{z}dx\,dy$

på S

b) Randen γ till S är cirkeln $x^2+y^2=4$, $z=0$.
För rätt orientering i Stokes sats skall denna randkurva genomlöpas moturs (ty då ligger S på vänster sida). En parametrisering av γ med denna orientering är:

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j} + 0\cdot\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Vi får då att:

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \oint_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t)\, dt =$$

$$= -12 \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = -12 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\, dt = \ldots = \underline{\underline{-12\pi}}$$