Flervariabelanalys

2014

Dennis Eriksson

).1(

Vi kommer arbeta i endera: $\mathbb{R}^2$ planet, eller $\mathbb{R}^3$, rymden

En vektor i $\mathbb{R}^2$ kan skrivas på formen: $P = (x, y)$

(x_0, x_1)

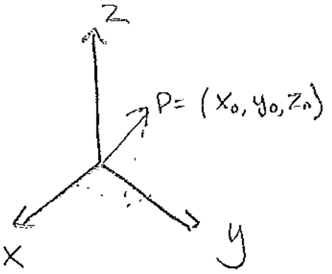
En vektor i $\mathbb{R}^3$ kan skrivas på formen: $P = (x, y, z)$ $\vec{x}$

(x_0, x_1, x_2) $\vec{x}$

Cartesiska koordinater, (x, y, z)

$(x_0, x_1, \ldots,) \in \mathbb{R}^n$

Cartesiska koordinatsystem:



Avstånd mellan punkter

$P = (x_0, y_0, z_0)$

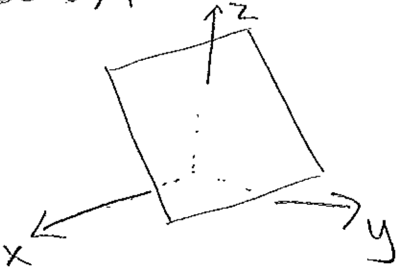
$Q = (x_1, y_1, z_1)$

$$|P - Q| = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}$$

(pythagoras formel)

Vi kommer vara intresserade av geometriska objekt i $\mathbb{R}^3$, rymden.

Ex Från linjär algebra, plan: $ax + by + cz = d$



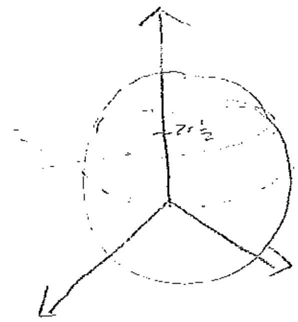
Mera allmänt, kan man betrackta ytor som ges av en ekvation: $f(x, y, z) = 0$

Ex $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, en sfär med radien 1

$\underline{X}$ $x^2+y^2+z^2=0$ ges av en punkt $(0,0,0)$

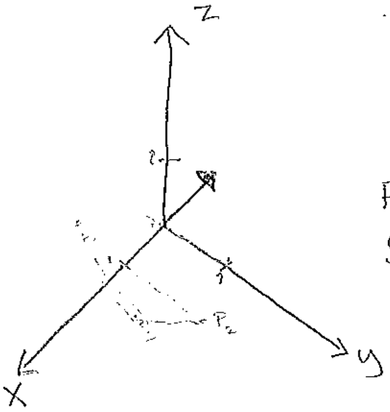
$\underline{X}$ $x^2+y^2+z^2=1$ och $z=\frac{1}{2}$

dvs, en cirkel i planet $z=1/2$



Ett geometriskt objekt som ges av olikheter:

$0 \le x+y+z \le 1$



$x+y+z=t$

$0 \le t \le 1$

Få känsla: $t=0$ $x+y+z=0$

går genom punkten

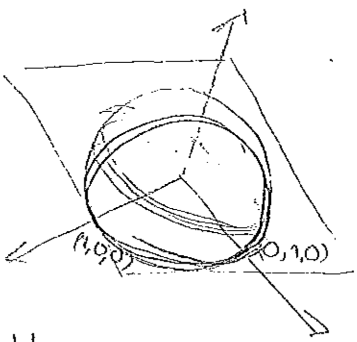
$(1,-1,0)=P_1$

$(0,1,-1)=P_2$

$(1,0,-1)=P_3$

$x^2+y^2+z^2=1$ (sfär)

$x+y \quad =1$ (plan)



Cirkel i planet $x+y=1$

Centrum ligger i mitten:

$$\frac{(1,0,0)+(1,0,0)}{2}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$$

radie eller diameter $(d=2r)$

diameter $=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2+(0-0)^2}=\sqrt{2}$

radie: $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

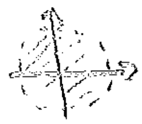
Ett sätt att beskriva det geometriska objektet:

Cirkel i planet $x+y=1$, med centrum $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ & radie $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Topologiska begrepp

- $S \subseteq \mathbb{R}^n$, delmängd i $\mathbb{R}^n$
- En omgivning av en punkt $P \in \mathbb{R}^n$, är en mängd $S = B_r(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n, |P-Q| < r\}$

Tex.: i $\mathbb{R}$: $(0,1)$ (öppet intervall) $r=1$

$\mathbb{R}^2$:  (öppen disk) $r=1$

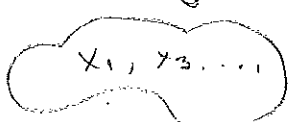
$\mathbb{R}^3$: $x^2+y^2+z^2 < 1$ innehållet i en boll med $r=1$

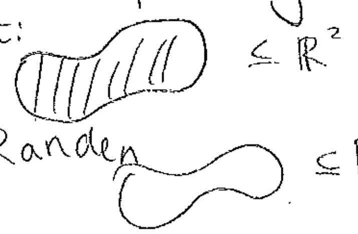
- S är en öppen mängd om varje punkt $P \in S$ har en omgivning som ligger i S. (viktigt för bl.a. kontinuitet)

- Komplimentet S^c är alla punkter i $\mathbb{R}^n$ som inte ligger i S.
- S är sluten om S^c är öppen.

Viktigt i optimeringsproblem, integrering ...
(alla gränsvärden $\lim_{n\to\infty} x_n$ $x_n \in S$, ligger fortfarande i S)

Intuitit: Givet en sekvens $x_n \in S$ med en gräns $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, så är $x \in S$



- S är begränsat om $S \subseteq B_r(0)$ för något r.
(viktigt i optimering)
- $P \in \mathbb{R}^n$ är en randpunkt till S om varje omgivning till P ligger både i S & S^c (Int: 

)

Randen till S (alla randpunkter)
Skriver vi som ∂S
- P är en inre punkt till S, om P har en omgivning som ligger i S
- P är en yttre punkt om P har en omgivning som ligger i S^c.

X Slutna mängder ges ofta på formen $f(x,y,z)=0$ dvs ges av en ekvation

Tex $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x\cos y + y e^z - 15 = 0 \end{cases}$ $\Big|$ $\begin{matrix} x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x\cos y + y e^z - 15 \geq 0 \end{matrix}$ (sluten boll), $\partial(SB)=$ yta av [illegible]

Exempel på en öppen mängd: Olikhetsekvationer $f(x,y,z)>0$, (strikta olikheter)

Tex $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 > 1 \\ x\cos y + y e^z - 15 > 0 \end{cases}$ $\Big|$ $x^2+y^2+z^2 < 1$ (öppen boll)

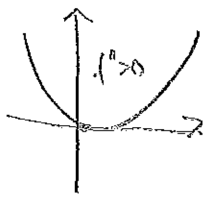
).5 Kvadratiska ytor

Motivation: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, finns Taylor utvecklingar till f runt $a \in \mathbb{R}$. $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} +$ + Resttermer

värdet i a — Hastighet/derivata — acc. i a

3 fall:

$f'' < 0$



$f'' = 0$

- lok. max. lok. minimum special fall

- I flervariabeln så är

$f(a)$ ~~, $f(a)$

$f'(a)(x-a) \rightsquigarrow$ linjära plan, (studerat i linjär algebra)

$f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} \rightsquigarrow$ kvadratiska ytor

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fzy + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Komplettering

Låt $f(x,y,z)\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vara kontinuelig

Slutna mängder (exempel) $a \leq f(x,y,z) \leq b$ | $a = -\infty$
($a = b$ möjligt)

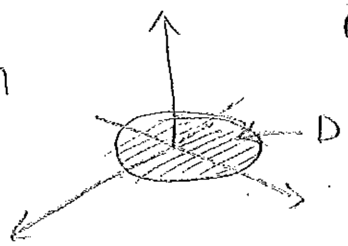
Öppna mängder (exempel) $a < f(x,y,z) < b$ | $b = +\infty$

Snitt mellan slutna mängder är slutna

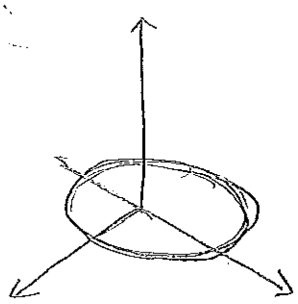
Snitt mellan öppna mängder är öppna

T.ex. $a < f(x,y,z) \leq b$ varken sluten eller öppen för $a, b \in \mathbb{R}$

3 exempel: en sluten disk i $\mathbb{R}^3$ är sluten



en cirkel i $\mathbb{R}^3$ är sluten



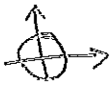
en öppen disk  är öppen i $\mathbb{R}^2$

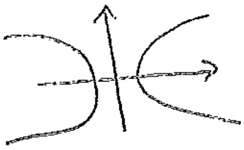
ej öppen eller sluten i $\mathbb{R}^3$

10.5 Kvadratiska ytor (i Rymden $\mathbb{R}^3$)

Repitition från envariabel:

1) Parabel, $y=x^2$ 

2) Cirkel $x^2+y^2=1$ 

3) Hyperbel $x^2-y^2=1$ 

- I flervariabel, betracktar vi istället kvadratisk uttryck med 3 variabler, x, y, z.

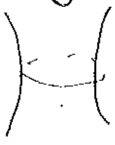
$$\underbrace{\boxed{Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz}_{\text{Kvadratiskt uttryck}}\underbrace{+Gx+Hy+Iz}_{\text{Linjärt uttryck}}+\underbrace{J}_{\text{Konstant uttryck}}}=0$$

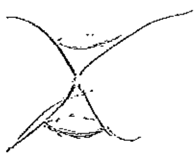
Ett exempel: $x^2+y^2+z^2=1$ en sfär

- Ett degenererat (urartat) exempel: $(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)\cdot(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)$

  union av 2st plan

- **Ex** $x^2+y^2-z^2=t$
$\begin{cases} t=1 & \text{enmantlad hyperboloid} \\ t=0 & \text{kon} \\ t=-1 & \text{2mantlad hyperboloid} \end{cases}$

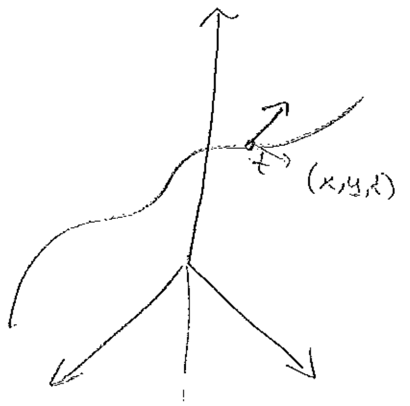
$t=1$ 

$t=0$ 

$t=-1$ 

11.1 Vektorfunktioner & kurvor (kurvor i Rym…

Vill modellera partiklar som far runt i Rymden.



kan beskrivas med en viss position vid en given tidpunkt t, Vid tid t, befinner sig partikeln vid (x, y, z)

$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$r(t) = x(t) \cdot i + y(t) \cdot j + z(t) \cdot k$, där i, j, k är standardbas. $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$

Exempel på en vektorvärd funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
Mest sett skalärvärda funktioner.

Hastighet vid en tid t: (över ett litet intervall Δt) $\frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$

Om $\Delta t \to 0$, $v := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} r$

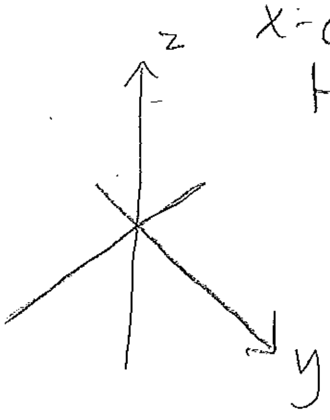
V är en vektor.

Hastigheten v mäter hur fort och i vilken riktning r är påväg i.

Ex $r(t) = t \cdot i \ (+ 0 \cdot j + 0 \cdot k)$

r beskriver en partikel som rör sig längs x-axeln.

Har hastighet $\frac{dr}{dt} = r' = 1 \cdot i$



Fart (speed): längden på hastighetsvektorn

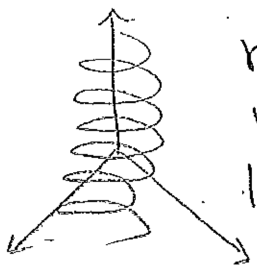
Fart $= |v| = \left| \frac{d}{dt} r(t) \right|$

Föregående exempel har konstant fart 1.

Obs: $\frac{d}{dt} r(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

- Acceleration: $a = \frac{d}{dt} v = \frac{d^2}{dt^2} r$ dubbel derivata

- Ex



$r(t) = (\cos t, \sin t, t)$

$v = (-\sin t, \cos t, 1)$

$|v| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} \overset{\text{Trigg ettan}}{=} \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$a = (-\cos t, -\sin t, 0)$

Obs!: $|a| = \sqrt{(-\cos t)^2 + (-\sin t)^2} = \sqrt{1} = 1$

$\Rightarrow$ absolutbeloppet av accelerationen är konstant!

- Mini-rep. från linjär algebra

$u, v \in \mathbb{R}^3$, $u = (u_1, u_2, u_3)$

$v = (v_1, v_2, v_3)$

Skalärp: $u \bullet v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \in \mathbb{R}$

Kryssp: $u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)i - (u_1 v_3 - u_3 v_1)j + (u_1 v_2 - u_2 v_1)k \in \mathbb{R}^3$

norm: $|u| = \sqrt{u \bullet u}$

Sats 1 i kapitel 11.1:

Låt u & v vara deriverbara funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,
Då gäller följande räkneregler:

a) $\frac{d}{dt}(u+v) = u' + v'$

b) Om dessutom: $\lambda : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ är deriverbar så

$\frac{d}{dt}(\lambda u) = \lambda' u + \lambda u'$

c) $\frac{d}{dt}(u \cdot v) = u' \cdot v + u \cdot v' \in \mathbb{R}$

d) $\frac{d}{dt}(u \times v) = u' \times v + u \times v' \in \mathbb{R}^3$

e) $\frac{d}{dt} u(\lambda(t)) = \lambda'(t) u'(\lambda(t))$

I föregående exempel $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$
så var $|v| = \sqrt{2}$, dvs. konstant

$v \cdot v = |v|^2 = 2$

$\frac{d}{dt} v \cdot v = 0$ om farten är konstant

$\frac{d}{dt}(v \cdot v) = v \cdot v' + v' \cdot v = 2v \cdot v' = 2v \cdot a$

Påståendet att farten är konstant motsvarar att $v \cdot a = 0$ dvs v är vinkelrät mot a.

$v = (-\sin t, \cos t, 1)$

$a = (-\cos t, -\sin t, 0)$

$v \cdot a = \sin t \cos t - \sin t \cos t + 0 = 0$

Ex Beskriv kurvan $r(t) = t^2 i - t^2 j + k$

Vad är hastigheten, farten & accelerationen

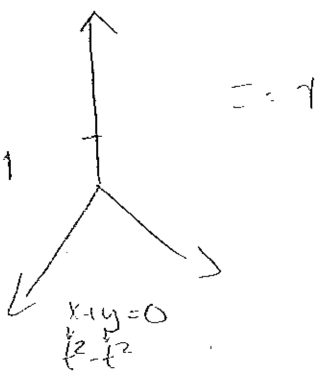
$v = (2t\, i - 2t\, j + 0 \cdot k)$

$|v| = \sqrt{(2t)^2 + (-2t)^2 + 0^2} = \sqrt{4t^2 + 4t^2} = \sqrt{8t^2} = \sqrt{8}\,|t|$

$a = 2i - 2j + 0 \cdot k$

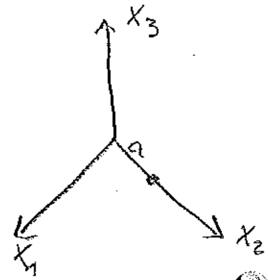
geometriskt:

linjen $x+y=0$ i planet $z=1$



Låt Q vara en godtycklig punkt på x-axeln.

$Q = (a, 0, 0 \ldots, 0)$ För något $a \in \mathbb{R}$



Därför

$$d(P, Q) = \sqrt{(1-a)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2 \ldots (n-0)^2} =$$

$$= \sqrt{(1-a)^2 + (m-1)}$$

Det minsta värdet av $d(P, Q)$ uppnålls för $a = 1$ och är lika med $\sqrt{m-1}$

V = mängden av punkter (x, y, z) som uppfyller (1)

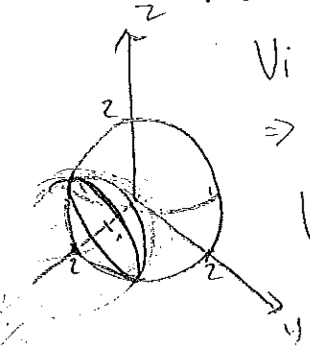
W = mängden av punkter (x, y, z) som uppfyller (2)

$U = V \cap W$ mängden av punkter (x, y, z) som uppfyller (1) och (2)

V är sfären med centrum i origo och radie 2

Vi kan omskriva (2) som $x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 0$

$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$

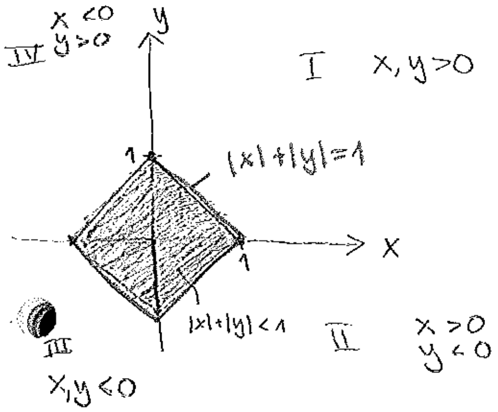


W är sfären med centrum i $(2, 0, 0)$ och radie 2

$(1) + (2) \Rightarrow x = 1$

Från (1) får vi $y^2 + z^2 = 3$

$\Rightarrow$ radien $= \sqrt{3}$ centrum i $(1, 0, 0)$



I första kvadranten blir ekvationen (1)

$x + y \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 1 - x$

I andra kvadranten blir ekvationen (2)

$x - y \leq 1 \Leftrightarrow x - 1 \leq y$

I tredje kvadranten blir ekvationen (3)

$-x - y \leq 1 \Leftrightarrow -x - 1 \leq y$

osv.

Punkterna som uppfyller $|x| + |y| = 1$ är randpunkter

Punkterna som uppfyller $|x| + |y| < 1$ är inre punkter

S är sluten!

Randen till $S \equiv \partial S \subset S$

Vi dividerar ekvationen med 2.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + \frac{27}{2} = 0$$

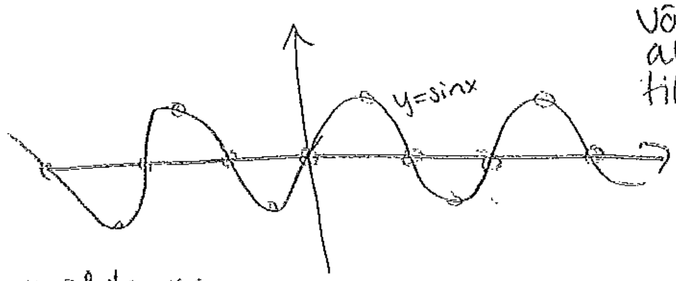
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 - 14 + \frac{27}{2} = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \frac{1}{2}$$

Sfär med radien $\frac{1}{\sqrt{2}}$ och centrum i $(1, -2, 3)$

Dubbelkon med centrum i $(2, 3, 1)$

En dimension: Betrackta funktionen $f(x)=\sin x$



Värdena av x sådanna att $f(x)=0$ kallas nivåpunkter till f med nivå noll

Värdena av x sådanna att $f(x)=1$ kallas nivåpunkter till f med nivå 1.

ANMÄRKNING: nivåpunkter ligger på x-axeln

Allmänhet, nivåpunkterna till f med nivå $c \in \mathbb{R}$ är värdena av x sådanna att $f(x)=c$

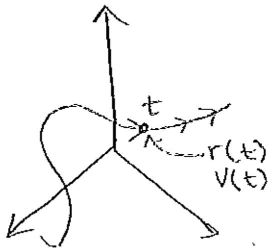
Notera att mängden av nivåpunkterna med nivå c kan vara tom

Två dimensioner: Given en funktion $f\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nivåkurvorna av f med nivå $c \in \mathbb{R}$ är mängden av punkter $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sådanna att $f(x,y)=c$

11.1 Minirepitition

Kurvor i Rymden, $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$



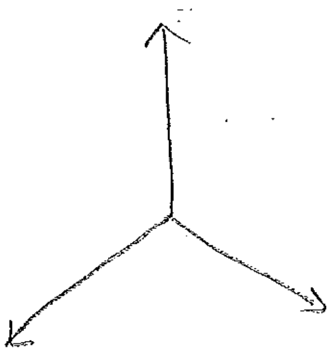
$v(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = \frac{dr(t)}{dt}$ = riktningsvektor

Ex $r(t) = t^2 i - t^2 j + 0 \cdot k$ (Beskriv hastighet, Fart & acc + skissa partikelns rörelse)

hast: $v(t) = 2ti - 2tj$

Fart: $|v(t)| = \sqrt{(2t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{8}\,|t| = 2\sqrt{2}\,|t|$

acc.: $a(t) = 2i - 2j = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$



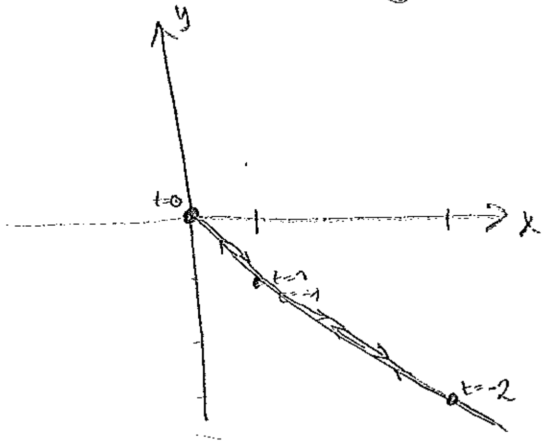
$t=1 \quad r(1) = i - j$

$t=0 \quad r(0) = 0i - 0j$

$t=-1 \quad r(-1) = i - j$

$t(-2) \quad r(-2) = 4i - 4j$

befinner sig i $z=0$ planet &



Det finns en relation mellan x & y: $x + y = 0$

$(t^2 + (-t^2) = 0)$,

$+ x \geq 0$

geometriskt får vi linjen

$x + y = 0 \quad x \geq 0$

11.3 Kurvor och parametrisering

I 11.1 var en rymdkurva med en partikel en funktion: $r(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

Mer allmänt vill vi kunna betrackta kurvor i Rymden utan partikel.

Ex $(1)\; 3x+4y+5z=0$
$(2)\; 4x+4y+6z=0$ $\Big\}$ Snitt av två plan: 

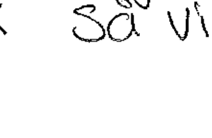
$(2)-(1) = x+z=0,$

Om jag löser ut y får jag: $y \overset{(1)}{=} \frac{-5z-3x}{4} \overset{z=-x}{=} \frac{5x-3x}{4} = \frac{2x}{4} = \frac{1}{2}x$

I termer av t.ex. x får jag:
$x=x,\; y=\frac{1}{2}x \quad z=-x$ Så vi kan sätta $t=x$
$r(t)=(t, \frac{1}{2}t, -t)$

Detta är ett exempel på en parametrisering av en kurva:
Man associerar en tidsvariabel (en variabel t) till den geometriska kurvan.

Inte unikt, vi hade kunnat löst ut y istället för x eller z istället för x.
y istället för x: $r_1(t)=(2t, t, -2t)$

Ex I planet $x^2+y^2=1$ 

Exempel på parametrisering:
$x=\cos t$
$y=\sin t$

Ex Ett annat exempel:
$x=\sin t$
$y=\cos t$

Ofta är exemplen snitt mellan ytor
t.ex plan & kvadratiska ytor

<u>Ex</u> Plan: $x+y+z=13$ (1)

Eliptisk cylinder: $4x^2+y^2=9$ (2)

Geometriskt ser vi att det är någon typ av kurva

(2) Är i princip en cirkel/ellips där z är godtycklig

$x=\frac{3}{2}\cos t$

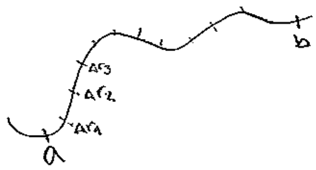
$y=3\sin t$

Från (1) har vi en formel för z i termer av x & y: $z=13-x-y$

$=13-\frac{3}{2}\cos t-3\sin t$

Alltså är en parametrisering av snittet mellan (1) och (2): $r(t)=(\frac{3}{2}\cos t, 3\sin t, 13-\frac{3}{2}\cos t-3\sin t)$

Kurvlängd:



En approximation till kurvlängden ges av

längd mellan a & b $\approx \sum|\Delta r_i|$, Ju mindre intervallet är desto bättre approximation

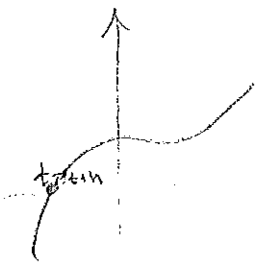
Givet en parametrisering kan vi säga mer:
Vi har $r(t)$, låt för ett litet tidsintervall Δt_i
Δr_i vara motsvarande sträcka som partikeln har färdats.

Approximation till längden: $\sum|\Delta r_i|=\sum\left|\frac{\Delta r_i}{\Delta t_i}\right|\cdot|\Delta t_i|=$

$$\sum\left|\frac{\Delta r_i}{\Delta t_i}\right|\Delta t_i$$

Om jag låter $\Delta t_i \to 0$ så får jag längden $\left|\frac{\Delta r_i}{\Delta t_i}\right|$ då $\Delta t_i \to 0$ är precis fart till r, dvs. längd mellan a & b $\int_a^b |v|dt$
där v är hastigheten och $|v|$ är farten

Alternativ 2: Låt a vara en punkt på en kurva och låt t vara godtycklig.



$s(t)$ = längden mellan t & a

Antag att s är deriverbar (alltid fallet i kursen)

$$\frac{ds}{dt} = ? = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \frac{\text{avstånd mellan } t+h \text{ \& } t}{h}$$

den har farit från $r(t)$ till $r(t+h) \sim r(t) + r'(t) \cdot h$ (taylor)

$$\frac{s(t+h)-s(t)}{h} \approx \frac{|r(t+h)-r(t)|}{h} \sim \frac{|r'(t) \cdot h|}{h} = |r'(t)|$$

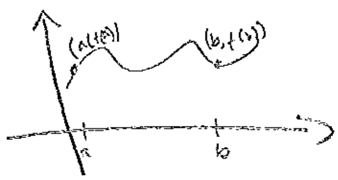
$= |v| =$ farten

Alltså: $\frac{ds}{dt} = |v| \Rightarrow s(t) = \int_a^t |v| \, dt$

Obs! kurvlängden mellan a och b beror ej på val av parametrisering.

Funkar också för kurvor i planet $(z=0)$

Ex Låt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en funktion och betrakta kurvan $y = f(x)$



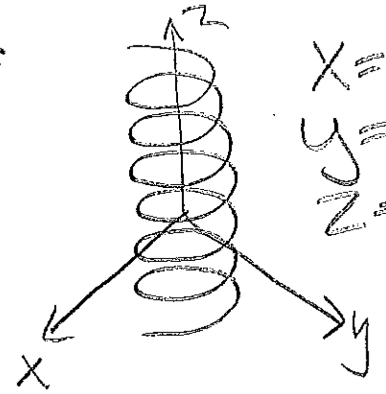
Formel för avstånd:

$|v| = \sqrt{\left(\frac{d}{dt} x\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y\right)^2}$ för någon parametrisering av kurvan $y = f(x)$. En parametrisering är $x = t$ $y = f(t)$

(*) $|v| = \sqrt{\left(\frac{dt}{dt}\right)^2 + \left(\frac{df}{dt}\right)^2} = \sqrt{1 + (f'(t))^2} \Rightarrow$ längden mellan a & b:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} \, dt$$

Ex



$x = \cos t$
$y = \sin t$
$z = t$

Vad är längden efter en snurr (mellan $t=0$ & $t=2\pi$)

$r(t) = (\cos t, \sin t, t)$

hastighet $v(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$

$|v(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} =$
$= \sqrt{2}$

längden: $\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\pi\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \pi$

2.1

Funktioner i flera variabler och nivåytor/nivåkurvor.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Ex $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Får problem om $1-x^2 < 0$ eftersom $\sqrt{1-x^2}$ blir odef.

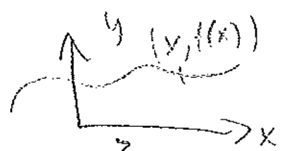
En mängd $U \subseteq \mathbb{R}^n$ är en domän eller definitionsmängd till f om $f: U \to \mathbb{R}$

I exemplet, domän ges av alla $x \in \mathbb{R}$ s.a. $1-x^2 \geq 0$ dvs. $[-1,1]$

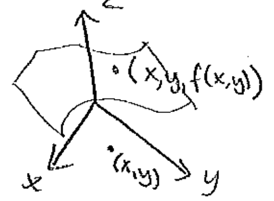
En mängd $V \subseteq \mathbb{R}$ ass. till $f: U \to \mathbb{R}$ är en målmängd om V "$= f(U)$" = alla punkter $r \in \mathbb{R}$ s.a. $r = f(\vec{x})$ för något $\vec{x} \in U$ ($\subseteq \mathbb{R}^n$)

Ex $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, har domän $\mathbb{R}^2 \setminus$ origo & målmängd $\mathbb{R} \setminus$ noll

Grafer: $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 2 dim yta i $\mathbb{R}^3$

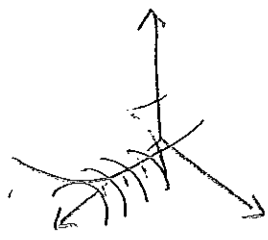
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ n-dim i $\mathbb{R}^{n+1}$

En nivåyta vid nivå c är alla x, y s.a. $c = f(x,y)$ $(f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$

Ex

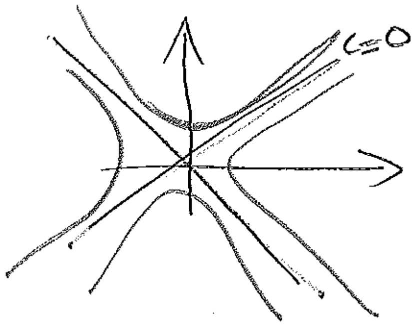
$z = x^2 - y^2$

en sadel



$c = z = 0$

$0 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$



$c = z = 1$

$1 = x^2 - y^2$

Man kan också sätta/fixera

$x = c = \pm 0$

$c=0$ $z = 0^2 - y^2$

$z = 1^2 - y^2$

Man kan också fixera $y=c$

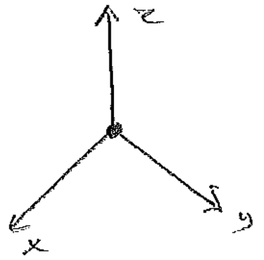
2.1 Exempel på en nivåyta vars graf inte går att rita

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (*)
$\quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (X)
$\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*)

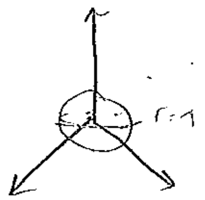
(*) Man kan skissa grafen i xy eller xyz-planet
(X) Går ej rita något 3dimensionellt i något 4-dimensionellt

Ex $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = t$

$t=0$



$t=1$



$t=2.$

$\underbrace{\text{Domän}}_{\text{(värdemängd)}}$ och målmängd

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$\cup\!\!| \qquad$$
$$V \xrightarrow{f} W$$

Vår domän

existerar

$W = f(V) = \{y \in \mathbb{R}^m, \text{ så } \exists x \in V, f(x) = y\}$

Ex $x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x}{x}$

Om $x \neq 0$ så är $\frac{x}{x} = 1$ men $\frac{0}{0}$ ej def

Domänen till $f(x) = \frac{x}{x}$ är $\mathbb{R} \setminus$ origo
men ofta (alltid) så utökar man domänen till hela $\mathbb{R}$ genom att sätta $f(0)=1$
Kontinuitetsargument

2.2

Gränsvärden & Kontinuitet

Vill skriva en matematisk definition för "jag kan rita upp f(x) eller f(x,y) utan att lyfta pennan".

Definition av gränsvärde:

$$f(x,y): \underset{\mathbb{R}}{\overset{}{U}} \to \underset{\mathbb{R}}{V}$$

$U \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$$

om (1) Varje omgivning till (a,b) innehåller element (punkter) i domänen

(2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta$ (som beror på ε)

för alla, existerar

s.a. om $(x,y) \in V$ = domänen och

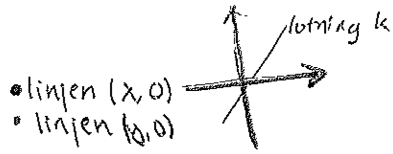
$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = |(x,y)-(a,b)| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

Definition av kontinuitet:

Vi säger att f(x,y) är kontinuelig i (a,b) om:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Finns oändligt många sätt att närma sig en punkt: Linjen (x,kx) närmar sig 0 då $x \to 0$



Ex $f(x,y) = \frac{x}{y}$

Finns gränsvärdet i $(0,0)$?

Testa linjen: $(x,5x)$

$f(x,y) = \frac{x}{y} = \frac{x}{5x} = \frac{1}{5}$ om $x \neq 0$

Testa linjen: $(x,7x)$

$f(x,y) = \frac{x}{y} = \frac{x}{7x} = \frac{1}{7}$ om $x \neq 0$

Räkneregler:

Låt $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$

Då gäller:

(1) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f \pm g) = L \pm M$

(2) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f \cdot g) = L \cdot M$

(3) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{L}{M}$ om $M \neq 0$

Ex $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \cdot y}{x^2+y^2} = ?$

Testa linjen $(x,0)$:

(möjligt gränsvärde) $\frac{x \cdot 0}{x^2+0^2} = \frac{0}{x^2} = 0$ om $x \to 0$

Testa linjen $(x,3x)$

(möjligt gränsvärde) $\frac{x \cdot 3x}{x^2+9x^2} = \frac{3x^2}{10x^2} \to \frac{3}{10}$ då $x \to 0$

Slutsats: Gränsvärdet existerar ej

Ex $\lim_{(x,y)\to(5,5)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$

Konjugat regeln: $x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$

$\frac{x^2-y^2}{x-y} = \frac{\cancel{(x-y)}(x+y)}{\cancel{x-y}} = x+y$

Denna har ett gränsvärde då $(x,y)\to(5,5)$

$5+5=10$

Variant på exemplet: $\frac{xy}{x^2+y^2}$

Ex $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{2}y}{x^2+y^2} = ?$

$x^2 \le x^2+y^2$

$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{\cancel{(x^2+y^2)}y}{\cancel{x^2+y^2}}\right| \le |y| \le \sqrt{x^2+y^2}$

Givet $\varepsilon > 0$ kan jag ta t.ex. $\delta = \varepsilon$ för gränsvärdesegenskap

Ex (1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} =$ 0 möjligt gränsvärde $x=y$: $\frac{\sin x^2}{2x^2} \to \frac{1}{2}$ då $x\to 0$

(gränsvärdet existerar ej)

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

$x^2+y^2 = r^2$, $\frac{\sin(r^2)}{r^2}$

$\lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^2)}{r^2} = 1 \quad \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$

Alla gränsvärdesbegrepp & kontinuitetsbegrepp gäller även $f(x,y,z): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$|(x,y)-(a,b)| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

Byt mot: $|\underset{\mathbb{R}^n}{\vec{x}} - \underset{\mathbb{R}^n}{\vec{a}}| = \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+ \dots +(x_n-a_n)^2}$

2.31 Partiella derivator

$f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Mått på hur $f(x,y)$ ökar om jag bara ändrar (lite) på x (eller y).

Definition: $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(a,b)} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$

(Partiell derivata m.a.p första variabeln)

Andra $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h} = f_2(a,b)$

Ex $f(x,y) = 2x^2y - \sin x$

$\frac{\partial}{\partial x} f = (\text{låtsats att } y \text{ är konstant}) = 4xy - \cos x$

$\frac{\partial}{\partial y} f = (\text{låtsats att } x \text{ är konstant}) = 2x^2$

Ex $f(x,y) = x^2y$

Betr. $f(x^2, xy) = (x^2)^2 \cdot xy = x^5y$

Två sätt att räkna ut $\frac{\partial}{\partial x} f(x^2, xy)$ [ett av dem är fel]

(1) $\frac{\partial}{\partial x}(x^5y) = 5x^4y$

$\frac{\partial}{\partial y}(x^5y) = x^5$

alt. $u = x^2 \quad v = xy$

$f(x^2, xy) = f(u,v)$

$\frac{\partial}{\partial u} f(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}(u^2v) = 2uv = 2x^2(xy) = 2x^3y$

$\frac{\partial}{\partial v} f(u,v) = \frac{\partial}{\partial v}(u^2v) = u^2 = x^2$

En av anledningarna till varför f_1 & f_2 kan vara bättre notationer än $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$

Man kan fortsätta derivera partiellt.

$$f(x,y) \to f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \to f_{1,1} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad \to f_{1,2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f$$
$$f(x,y) \to f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \to f_{2,1} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad \to f_{2,2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}$$

Sammanfattning: av 12.4 Alla blandade derivator är "Samma"/snarare oberoende av ordning. dvs. $f_{1,2} = f_{2,1}$

$f_{112} = f_{121} = f_{211}$

Ex $f(x,y) = e^{kx} \sin ky$

Beräkna f_{11} & f_{12}:

$$\frac{\partial}{\partial x} f = k e^{kx} \cdot \sin ky$$

$$\frac{\partial \partial}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f = k^2 e^{kx} \sin(ky)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f = e^{kx} \cdot (k \cdot \cos(ky))$$

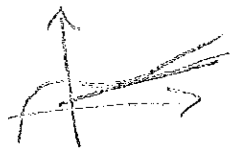
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f = e^{kx} (k^2 \cdot -\sin(ky)) = -k^2 e^{kx} \sin(ky)$$

Exempel på en lösning till värmeledningsekv. (utan tid). $u_{11} + u_{22} = 0$

Om ett antal veckor kommer ni kunna "se" att det här är rätt ekvation för värme i planet (utan tid)

Med parallella derivator kan vi ge ekvationer för tangentplan.

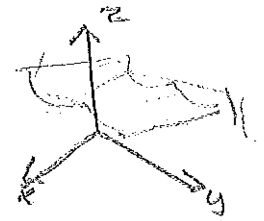
1-variabel, $y=f(x)$

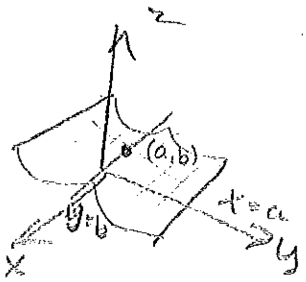


$y-f(a)=f'(a)(x-a)$
(tangentlinjens ekvation) i en variabel

2-variabler

$z=f(x,y)$





Längs $y=b$ (b konstant)
Om jag rör mig lite i x-led, hur mycket ändras f?
$z=f(x,y)$ ändras $\frac{\partial f}{\partial x}=f_1$
$\longrightarrow$ $=(1,0,f_1)$
-||- $x=a$: $(0,1,f_2)$

För att få tangentplanet som spänns upp av T_1 & T_2 kan vi räkna ut $T_2 \times T_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & f_2 \\ 1 & 0 & f_1 \end{vmatrix} = f_1 i + f_2 j - k$

Normalen ges av $(f_1, f_2, -1)$ & Tangentplanet går genom $(a,b,f(a,b))$

$f_1(x-a)+f_2(y-b)-(z-f(a,b))=0$

Tangentens ekvation

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ För alla $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ (som beror på ε) $\delta(\varepsilon)$

$\cup \quad \cup$

$f: V \to U$ s.a. $0 < |(x,y)-(a,b)| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

$\boxed{12.3}$ Partiella derivator (och tangentplan)

$z = f(x,y)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}$ = hur f ökar i x-riktning (om y inte rör sig)

= (partiell) derivata i första variabeln

$= f_1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = f_2$

Ekvation för tangentplan till $z = f(x,y)$ i punkten (a,b):

$$f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$$

Plan som har normal given av $(f_1(a,b), f_2(a,b), -1)$ och går genom punkten $(a, b, f(a,b))$

Ex $z = Ax + By + C$ (allmänt plan)

I punkten $(a, b, Aa+Bb+C)$ får vi vilket tangentplan.

$f_1(x,y) = A$

$f_2(x,y) = B$

$A(x-a) + B(y-b) - (z - (Aa+Bb+C)) = 0$

$Ax + By - z - \cancel{Aa} - \cancel{Bb} + \cancel{Aa} + \cancel{Bb} + C = 0$

$\Rightarrow Ax + By - z + C = 0$

$z = Ax + By + C$

Tangentplan är en generalisering av tangentlinjer.
De ger (förhoppningsvis) goda linjära approximation

$z = f(x,y)$

i en omgivning till (a,b) kommer tangentplanet approximera i z: $z \approx f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$

HL = linjär approximation till z i (a,b)

$\boxed{\begin{matrix}2.5\\2.6\end{matrix}}$ Linjära approximationer & deriverbarhet

Fråga: Hur bra är denna approximation?

Definition: Vi säger $z = f(x,y)$ är deriverbar i (a,b)

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - hf_1(a,b) - kf_2(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Täljaren går snabbare mot 0 än $\sqrt{h^2+k^2}$

$\Rightarrow$ linjära approximationer "rätt bra"

Sats 4 i 12.6 Om f_1 och f_2 och f är kontinueliga i en omgivning till (a,b)
$\Rightarrow$ f är differentierbar i (a,b)

Vill beräkna uttryck av formen $\frac{\partial}{\partial s} f(u(s,t), v(s,t))$

sammansättning av funktioner $\frac{\partial}{\partial t} f(u(s,t), v(s,t))$

Linjär approximation till f m.a.p u & v variablerna:

i (a,b) $f(u,v) \approx f(a,b) + \frac{\partial}{\partial u}(a,b)(u-a) + \frac{\partial}{\partial v} f(a,b)(v-b)$

För att förenkla: antar u $a=b=f(a,b)=0$

$u(s,t): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\left.\begin{matrix} u \approx \frac{\partial u}{\partial s}\cdot s + \frac{\partial u}{\partial t}\cdot t \\ v \approx \frac{\partial v}{\partial s}\cdot s + \frac{\partial v}{\partial t}\cdot t \end{matrix}\right\}$ $f(u,v) \approx \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\cdot s + \frac{\partial u}{\partial t}\cdot t\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial s}\cdot s + \frac{\partial v}{\partial t}\cdot t\right)$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial s}\right)s+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}\right)t$$

En linjär approximation av $f(u(s,t),v(s,t))$ Med avseende på s&t istället ges av:

$$\left[f(u(s,t),v(s,t))\approx\frac{\partial f}{\partial s}\cdot s+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot t\right]$$

De linjära termerna borde korrespondera till varandra.

Om f är differentierbar och u&v har kontinueliga partiella derivator så är feltermerna inte så farliga:

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial s},\quad \frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}$$

(kedjeregeln i flera variabler)

Klassisk kedjeregel

$$(f(\lambda(t)))'=f'(\lambda(t))\cdot\lambda'(t)$$

I Flera variabler: $f: \mathbb{R}^2\Rightarrow\mathbb{R}$ $u: \mathbb{R}^2\Rightarrow\mathbb{R}$ $\lambda=(u,v)$

$v: \mathbb{R}^2\Rightarrow\mathbb{R}$

$\lambda: \mathbb{R}^2\Rightarrow\mathbb{R}^2$

$$d\lambda=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t}\\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t}\end{pmatrix}$$

$$df=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v}\end{pmatrix}$$

$$df(g)\circ dg=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t}\\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s},\ \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

Ex $f(u,v) = u^2 + v^2$

$u = \cos t$ (dvs finns inget s)

$v = \sin t$

Beräkna de partiella derivatorna

$\frac{\partial f}{\partial u} = f_1 = 2u, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = 2v$

$\frac{\partial f}{\partial t} = ?$

$f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = 2u \cdot (-\sin t) + 2v \cdot \cos t =$

$= -2\cos t \cdot \sin t + 2 \sin t \cos t = 0$

Ex Beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}(x^2+y^2, x+y)$ & $\frac{\partial f}{\partial y}(x^2+y^2, x+y)$

i termer av f_1 och f_2

$f(x^2+y^2, x+y) = F(x,y)$

$\frac{\partial F}{\partial x}$ i termer av f_1 och f_2

$u = x^2+y^2$

$v = x+y$

$\frac{\partial F}{\partial y}$ i termer av f_1 och f_2

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f_1 \cdot 2x + f_2 \cdot 1$

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = f_1 \frac{\partial u}{\partial y} + f_2 \frac{\partial v}{\partial y} = f_1 \cdot 2y + f_2 \cdot 1$

Ex $f(u,v) = u^2 \cdot v$

$u = \cos(xy)$

$v = e^x$

$f(u,v) = f(\cos(xy), e^x) = \cos(xy)^2 \cdot e^x$

Vad är $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$?

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2uv \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= 2uv \cdot (-y\sin(xy)) + u^2 \cdot e^x$$

$$= 2\cos(xy) \cdot e^x \cdot y \cdot -\sin(xy) + \cos^2(xy) e^x$$

$$= \cos(xy) e^x (-2y\sin(xy) + \cos(xy))$$

Kedjeregeln:

$f(u(s,t), v(s,t))$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$$

Specialfall: u och v är bara funktioner av t men inte s

$u = u(t)$

$v = v(t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$$

partiell derivata

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$ kan skrivas som så eftersom en variabel

$g(t) = f(u(t), v(t))$

"Bevis": $\frac{df}{dt} = \frac{dg}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t+h))}{h}}_{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}} + \underbrace{\frac{f(u(t), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{h}}_{\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}}$$

Exempel i det linjära specialfallet:

- $f(u,v) = Au + Bv$, $\frac{\partial f}{\partial u} = A$ $\frac{\partial f}{\partial v} = B$
- $u(s,t) = as + bt$, $\frac{\partial u}{\partial s} = a$ $\frac{\partial u}{\partial t} = b$
- $v(s,t) = cs + dt$, $\frac{\partial v}{\partial s} = c$ $\frac{\partial v}{\partial t} = d$

$f(u,v)$ i termer av s & t

$$f(u,v) = Au + Bt = A(as+bt) + B(cs+dt) =$$
$$= Aas + Abt + Bcs + Bdt =$$
$$= (Aa+Bc)s + (Ab+Bd)t$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = Aa + Bc = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}$$

kolla ovan!

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Ab + Bd \overset{!}{=} \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$$

Går att skriva som:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right]\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Ett annat sätt att uttrycka kedje-regeln på.

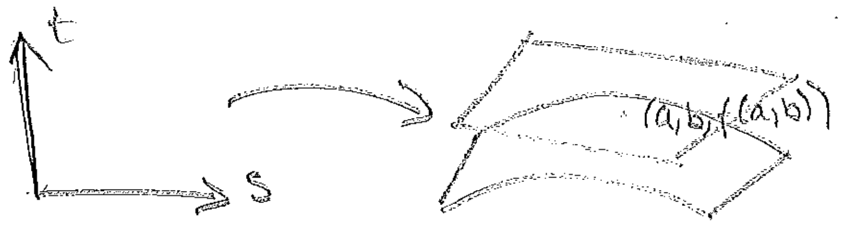
$f(x,y) \rightsquigarrow$ linjärisering i en punkt

linjärisering $f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Idén är att de partiella derivatorna står för linjäriseringen, så sammansättning av funktioner borde motsvara sammansättning av linjäriseringar.

Mer geometriskt motsvarar de inducerade linjära avbildningarna på tangentplanet. $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} = M$

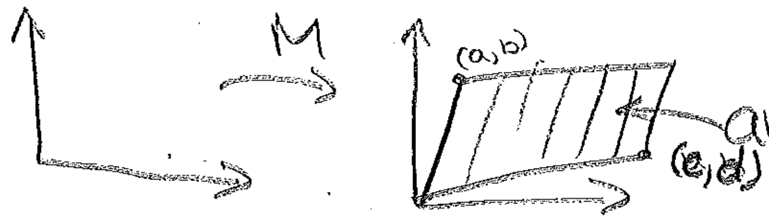
$\Longrightarrow$



$M\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbildning mellan tangentplan.

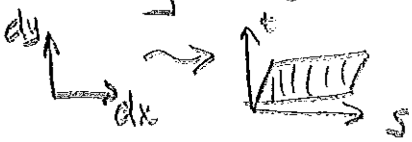
Matrisen $M = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix}$ är den sk. Jacobi-matrisen

Vad är det(M)? det(M) är volymen/arean av det parallellogram som spänns upp av vektorerna $M\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ & $M\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$



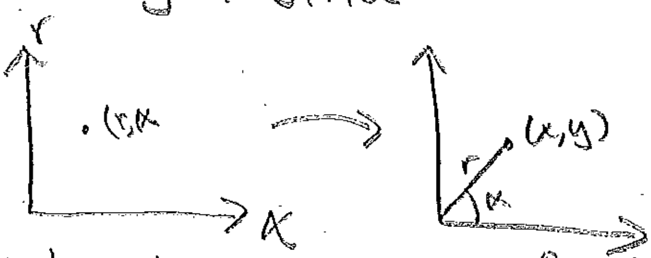
arean är det(M)

det(Jacobimatrisen) mäter hur mycket dxdy ändras



$dxdy = \det(M)\,dsdt$

Exempel: $x = r\cos\alpha$
$y = r\sin\alpha$ s.k. polära koordinater



Jacobi-Matrisen: $M = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix}$

$$\det(M) = r\cos^2\alpha - (-r\sin^2\alpha) = r(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = r$$

För att förstå partiella derivator och speciellt linjäriseringar av $f(x,y)$ vill man förstå $(f_1, f_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$
$f(u,v)$

2.7 Gradienter och riktningsderivator

<u>Definition:</u> $\nabla f(a,b) = (f_1(a,b)\ f_2(a,b))$ är gradienten till f i punkten (a,b).

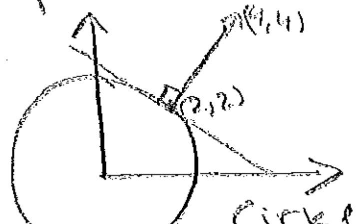
Jacobi-matrisen motsvarandes $u(s,t)$ & $v(s,t)$ $\quad M = \begin{pmatrix} \nabla u \\ \nabla v \end{pmatrix}$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Ex $\quad f(x,y) = x^2 + y^2 \quad \nabla f = (2x, 2y)$

I punkten $(2,2)$ $\quad \nabla f(2,2) = (4,4)$



Cirkel med radien $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2 \cdot \sqrt{2}$

$\nabla f(2,2)$ ortogonal mot tangentlinjen på nivåkurva $(2\sqrt{2})^2 = x^2 + y^2$

Exempel $f = z = 5x + 3y - 7$

Gradienten $(1,1)$ $\nabla f = (5, 3)$

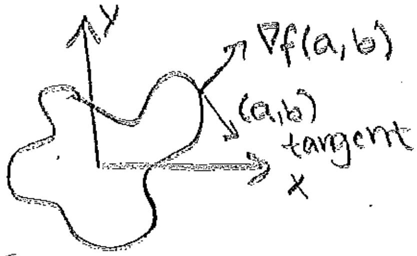
$z(1,1) = 5 + 3 - 7 = 1$

Kurva $5x + 3y = 8$ (nivåkurva vid $z = 1$)

$(5,3)$ är exakt normal till motsvarande kurva i (x,y)-planet.

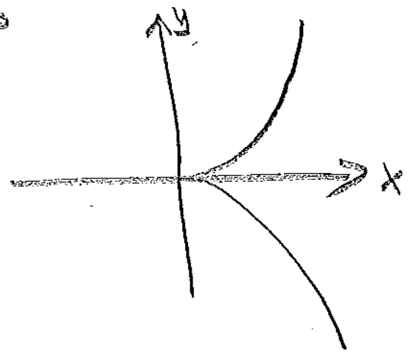
<u>Sats.</u> $\nabla f(a,b)$ är normal till tangent till nivåkurvan längs $z = f(a,b)$

$z = f(x,y) = f(a,b)$

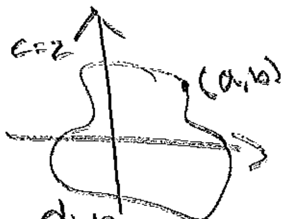


Motexempel. $z = x^3 - y^2$, i $(0,0)$, $\nabla f = (3x^2, -2y) = (0,0)$

$z = 0$ är nivåkurvan $y^2 = x^3$



$C = z = f(x,y)$



$x = x(t)$, $y = y(t)$ dvs. en parametrisering av kurvan

$x(0) = a$ $y(0) = b$

$\frac{d}{dt} C = \frac{df}{dt}(x(t), y(t)) = f_1 x'(t) + f_2 y'(t) = 0$

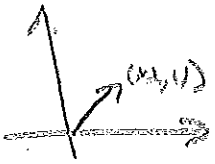
dvs. $(f_1, f_2)(x'(t), y'(t)) = 0$

och om $t = 0$ $\nabla f(a,b) \cdot (x'(0), y'(0)) = 0$

$V = (x'(t), y'(t))$ = hastigheten (tangentvektor till nivåkurva)

Skalärprodukt $= 0$ dvs. ortogonala

Gradienten kommer också att hjälpa oss att förstå hur snabbt $z=f(x,y)$ växer i en viss riktning:



$\sqrt{u^2+v^2}=1$

Fråga: Hur snabbt växer $z=f(x,y)$ i riktning (u,v), där (u,v) är en enhetsvektor?

$g(t)=f(x+tu,y+tv)$

$g'(t)=$ kedjeregeln $= f_1 u + f_2 \cdot v = (u,v)\cdot\nabla f$

$D_{(u,v)}f(a,b)=$ ökning av $f(x,y)$ i punkten (a,b) & riktningen (u,v)

$=(u,v)\cdot\nabla f(a,b)$

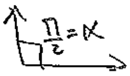
$\vec{u}=(u,v)$ $\quad = \vec{u}\cdot\nabla f(a,b) \overset{\text{linjär algebra}}{=} |u|\cdot|\nabla f(a,b)|\cos\alpha$

där α är vinkeln mellan $\vec{u}$ & $\nabla f(a,b)$

$=|\nabla f(a,b)|\cos\alpha$

$\vec{u}$ tangent på nivåkurva $\Rightarrow$ z ändras inte alls.

$D_{\vec{u}}f=0$

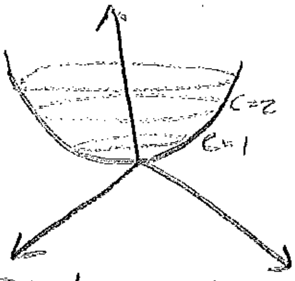


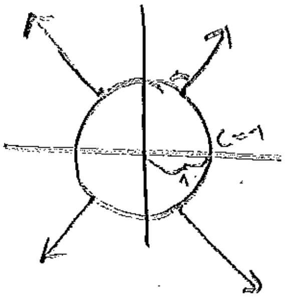
Den riktning som $f(x,y)$ ökar mest i är då $\vec{u}\cdot\nabla f(a,b)$ är som störst, dvs. om $\vec{u}=\frac{\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$

då blir $D_{\vec{u}}f(a,b)=|\nabla f(a,b)|$ (maximala ökningen i den punkten)

Maximala minskningen är i motsatt riktning $\frac{-\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$, med maximal minskning $-|\nabla f(a,b)|$

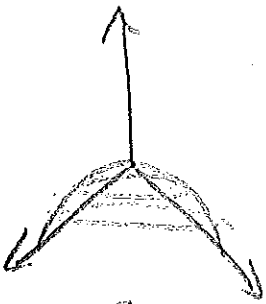
$z=x^2+y^2$

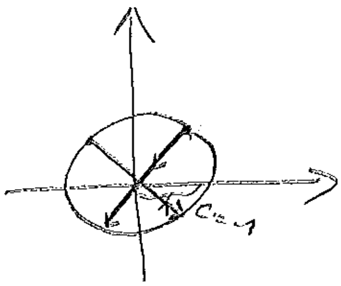




$\nabla f=(2x,2y)$

- $z=-x^2-y^2$





$\nabla f=(-2x,-2y)$

i $(0,0)$ $\nabla f(0,0)=(0,0)$

- Om vi har fler variabler, t.ex.
- $t=f(x,y,z)$ $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$
$=(f_1, f_2, f_3)$

Fortfarande sant att ∇f är ortogonal till nivåytor till $t=f(x,y,z)$
T.ex. kan man ta $t=0$, & $f(x,y,z)=g(x,y)-z$
dvs. vi betraktar ytan $z=g(x,y)$
Normalen är given av: $(g_1, g_2, -1)$
$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, -1\right)=(g_1, g_2, -1)$

Exempel 8 i 12.7

Hitta tangentvektorn till kurvan som skärs ut av $z = x^2 - y^2$, $xyz + 30 = 0$ i punkten $(-3, 2, 5)$

Oftast vill man parametrisera kurva $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ & sen ta $r'(t) \approx$ tangentvektorn

Tangentvektorn oftast ortogonal till normaler till båda ytorna dvs. $T = N_1 \times N_2$

nivåytor $\begin{cases} F: 0 = z - x^2 - y^2 \\ G: 0 = xyz - 30 \end{cases}$

Normalerna ges av gradienter

$\nabla F = (-2x, -2y, 1) = N_1$

$\nabla G = (yz, xz, xy) = N_2$

$f(x,y) = 1 - \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$ och längs $x=0$ så är hela uttrycket 1. $(0,y)$

$f(0,y) = 1$

Om gränsvärdet finns så måste det vara 1.

Påst. $\frac{x^3y^3}{x^2+y^2} \to 0$ då $(x,y) \to 0$

$x^2 \leq x^2+y^2$, $\left|\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|x^2 \frac{xy^3}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{(x^2+y^2)(xy^3)}{x^2+y^2}\right| = |xy^3| \to 0$ då $(x,y) \to$

Måste definera $f(0,0) = 1$ och då är den kont

#1 Utan kedjeregel

$u = \sqrt{e^{2st} + (1+s^2\cos t)^2}$

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{e^{2ts} + (1+s^2\cos t)^2}} \cdot \left(2s \cdot e^{2st} + 2(1+s^2\cos t) \cdot s^2 \cdot -\sin t\right)$

#2 Med kedjeregel:

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad \frac{\partial y}{\partial t} = -s^2\sin t$

$\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad \frac{\partial x}{\partial t} = se^{st}$

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot se^{st} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot -s^2\sin(t) = \frac{xse^{st} - ys^2\sin t}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow$

$x = e^{st}$
$y = s\cos t$

$$\frac{e^{st} \cdot s - (1+s^2\cos t)s^2\sin t}{\sqrt{e^{st} + (1+s^2\cos t)^2}}$$

$x = r\cos\theta$ övergång i polära koordinater
$y = r\sin\theta$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f_1 \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + f_2 \frac{\partial y}{\partial t} = \boxed{f_1 \sin s + f_2 \cos s}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(f_1 \sin s + f_2 \cos s) = \frac{\partial}{\partial s}(f_1 \sin s) + \frac{\partial}{\partial s}(f_2 \cos s)$$

produktregel

$$\frac{\partial}{\partial s}(f_1 \sin s) = \frac{\partial f_1}{\partial s} \cdot \sin s + f_1(-\cos s),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial s} = \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = f_{11}(\cos s) + f_{12}(-\sin s)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(f_1 \sin s) = f_{11}\cos s + f_{12}\sin s - f_1\cos s$$

Kedjeregel & (vanliga) produktregeln

12.~~5~~.7 **Gradienter**

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y)$

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (f_1, f_2) = (f_x, f_y)$

∇ = nabla

Viktiga egenskaper: I en punkt (a,b), $\nabla f(a,b)$ är en normal till nivåkurvan: $C = f(x,y)$
$C = f(a,b)$
(om $\nabla f(a,b) \neq 0$)

- ∇f mäter (eller ger) den riktning som $f(x,y)$ ökar mest i.
- $|u| = 1$ u vektor
  $u \cdot \nabla f(a,b)$ = ökningen i riktningen u

12.~~5~~.8 (implicita funktioner)

(överbetygsdel som vi skjuter upp och går igenom i mån av tid) x = 00*

9) Taylorutvecklingar

Taylorpolynom, eller taylorutvecklingar i en variabel

F(t) (def. & diff i en omgivning [0,1])

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \frac{F'''(0)}{3!} + \dots + \frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!} \quad \text{där } 0 \leq \theta \leq 1$$

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \frac{F'''(0)}{3!}t^3 + \dots + \frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}t^{(m+1)}$$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad \vec{h}, \vec{a} \in \mathbb{R}^n$

Vill få Taylorutveckling runt $\vec{a}$, vill variera $\vec{h}$

$F(t) = f(\vec{a} + t\vec{h}) = (\text{Om } a = (a,b), \vec{h} = (h,k)) = f(a+th, b+tk)$

En funktion av t, så vi kan Taylorutveckla i satset ovan (*)

F'(t) och utvärdera i 0

Kedjeregeln $\Rightarrow F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+th, b+tk)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a+th, b+tk) \cdot k$

och i $t = 0$ $\quad F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot k$

$$= (h,k) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (h,k) \cdot \nabla f$$

$$= (\vec{h} \cdot \nabla f)$$

Första ordningens Taylorapproximation ges av:

$$f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + (\vec{h} \cdot \nabla f)(a,b) \ (+\text{felterm})$$

$$\approx f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k \ (+\text{felterm})$$

$h = x - a$

$k = y - b$

Betrackta $(\vec{h}\cdot\nabla) = h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}$

$$F''(t) = (\vec{h}\cdot\nabla)\cdot(\vec{h}\cdot\nabla)\,F(t)$$

$$F^{(m)}(t) = (\vec{h}\cdot\nabla)^m F(t)$$

För att räkna ut $F''(0)$ vill man räkna ut

$$(\vec{h}\cdot\nabla)^2 = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) = h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$F''(0) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad i\ (a,b)$$

$$= f_{11}h^2 + f_{12}\cdot 2hk + k^2\cdot f_{22}$$

Andra gradens/ordningens Taylorapproximationer:

$$f(a+h, b+k) \approx \underset{\text{punkt}}{f(a,b)} + (h,k)\cdot\underset{\text{(vektor)}}{\nabla f(a,b)} + \frac{1}{2}\underbrace{(h^2 f_{11} + 2hk f_{12} + k^2 f_{22})}_{\text{går att sammanfatta med matris}}$$

$$H(f) = \text{Hessianen till } f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

$$[h, k]\cdot H(f)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = h^2 f_{11} + 2hk f_{21} + k^2 f_{22}$$

Nästa steg i approximationen borde vara en 3-dimensionell matris.

m-te ordningens taylorapproximation får man om man går till $F^{(m)}(0)$
$P_m(a+h, b+k)$

Ovan: linjär approximation $= P_1$
kvadratisk approximation $= P_2$

Exempel: $f(x,y)=x^2+y^2$. Taylorutveckla runt (0,0) upp till ordning 2

$f(0,0)=0$

$\nabla f=(2x,2y)=(0,0)$

$H(f)=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

P_2 ges av $0+(h\cdot 0+k\cdot 0)+\frac{1}{2}(2h^2+2\cdot 0\cdot hk+2k^2)=$
h^2+k^2

Exempel $f(x,y)=y^2-x^3$, runt (0,0)

- $f(0,0)=0$
- $\nabla f=(-3x^2, 2y)=(0,0)$
- $H(f)=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$P_0=0$

$P_1=0+0=0$

$P_2=0+0+h^2$

$(\vec{h}\cdot\nabla)^3 f=(h^3 f_{111}+3h^2k\, f_{112}+3hk^2 f_{122}+k^3 f_{222})=$

$f_{112}=\frac{\partial}{\partial x}(f_{12})$

$f_{111}=\frac{\partial}{\partial x}(f_{11})$

$f_{222}=\frac{\partial}{\partial y}(f_{22})$

$f_{11}=-6x$

$f_{111}=-6$

$P_3=0+0+h^2-\frac{6k^3}{3!}=h^2-k^3$

Ska se ut som y^2-x^3

Om ni har ett polynom av någon grad: $f(x,y)=a+bx+cy+$ kvadratis dx^2+exy+ [illegible]
Så får vi m:te gradens Taylor-approximation genom att kapa av all: av grad högre än m.

Slutsats: Om $m=3$, $P_m=y^2-x^2$

Exempel sin(x+2y), utveckla runt (0,0) upp till grad 3.

Alternativ 1: Använd formel $(\vec{h}\cdot\nabla)^m f$ för att räkna ut koefficienter.

Alternativ 2: Använd observationer på föregående blad och en befintlig Taylorutveckling.

$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!}$ osv.

Sätt in $t = x+2y$

$\sin(t) = \sin(x+2y) = (x+2y) - \frac{(x+2y)^3}{3!} + \frac{(x+2y)^5}{5!} - \ldots\ldots$

$\rightarrow P_3 = (x+2y) - \frac{(x+2y)^3}{3!} = P_4$

$(x+2y)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 2y + 3x\cdot(2y)^2 + (2y)^3 =$

$x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

$P_3 = x + 2y - \frac{x^3}{6} - x^2y - 2xy^2 - \frac{4}{3}y^3$

Tillämpningar av parallella derivator kap 13

13.1 Extremvärden

I envariabel ville man räkna ut maximum och minimum av funktioner: Behövde information om
$f'(t)$ (ville att det skulle vara noll)
$f''(t)$ (ville att det skulle vara > 0)

I flera variabler: $f' \rightsquigarrow \nabla f$ gradienten
$f'' \rightsquigarrow H(f)$, Hessionen

Definition: $f(x,y): \underset{\mathbb{R}^2}{\overset{\cap\shortparallel}{U}} \to \mathbb{R}$

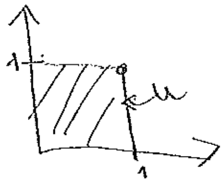
då är (a,b) ett lokalt maximum om för alla (x,y) i närheten av (a,b) & i domänen så $f(x,y) \leq f(a,b)$

då är (a,b) ett lokalt minimum om för alla (x,y) i närheten av (a,b) & i domänen så $f(a,b) \leq f(x,y)$

Om vi byter ut lokalt mot globalt kräver vi olikheterna för alla (x,y)

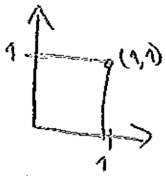
$z = f(x,y)$
Borde ha, för ett lokalt maximum, gradienten är 0.

Ex $f = x^2 + y^2$ $\quad \nabla f = (2x, 2y) = (0,0)$ om $x = y = 0$ då är det globalt minimum.



Får inte med punkten $(1,1)$ som ett maximum enbart med detta.

Ex $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ med samma domän

$x,y \in$ 

$\nabla f = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Halvproblem: $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ då $(x,y) \to 0$ har ej gränsvärde, så $\nabla f(0,0)$ ej definerat.

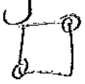
Sats $f(x,y)$ har ett lokalt maximum (eller minim i (a,b) så gäller att någon av följande är sann

(1) $\nabla f(a,b)=0$

(2) $\nabla f(a,b)$ ej definerad (som andra exemplet)

(3) (a,b) är en randpunkt (som i båda exemplen)

Sats Om $U \subseteq \mathbb{R}^2$ är sluten & begränsad (kompakt) så har $f(x,y)$ ett globalt maximum (och minimum)

I föregående exempel: om vi tar bort hörnen från  så är nytt domän ej sluten.

Till nästa föreläsning:

Använda Hessianen och dess egenvärden för att bestämma hurvida något lokalt maximum eller minimum (eller varken eller)

exempel:  bestäm x,y,z så att volymen är 5 & den har maximal area. dvs maximera $(2x+2xz+2yz)=f(x,y,z)$

$xyz=5$

Lite repitition

P_m, m-te approximation av en funktion f.

P_2, taylorutveckling av en funktion runt punkt (a,b)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. $f(x,y)$

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + (h,k)\cdot \nabla f(a,b) + \frac{1}{2}[h,k]\,\text{Hessianen}(f)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

$$= f(a,b) + (f_1 \cdot h + f_2 \cdot k) + \frac{1}{2}(f_{11}\cdot h^2 + 2f_{12}hk + f_{22}k^2)$$

$$\nabla f = (f_1, f_2)$$

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix}$$

Exempel 12.9.1

Hitta Taylorutveckling av $\frac{1}{2+xy^2}$ runt $(0,0)$

Kan använda formel som ovan.

Istället använda Taylor eller Maclaurin-utvecklingar i en variabel.

Ser ut som $\frac{1}{1+t}$ eller $\frac{1}{1-t}$.

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \ldots \quad \text{om } |t| < 1$$

Skriva om: $\frac{1}{2+xy^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{xy^2}{2}\right)}$ $\quad t = \frac{-xy^2}{2}$

$$\frac{1}{2(1-t)} = \frac{1}{2}\cdot(1 + t + t^2 + \ldots) = \frac{1}{2} - \frac{xy^2}{4} + \frac{x^2y^4}{8} - \frac{x^3y^6}{16} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^n y^{2n})}{2^{n+1}}$$

Förvirring: $(1+t)^{Q1}$ ajaj!, sen använda binomialsats.

Binomialsatsen säger att om $n \in \mathbb{N}$ (heltal, positiva

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = a^n + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Pascals triangel

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Annat exempel:

Hitta P_2 $\frac{1}{x+2y+1}$ runt $(0,0)$ upp till grad 2.

$f(0,0) = 1$

$f_1 = \frac{-1}{(x+2y+1)^2}$ $\quad f_2 = \frac{-2}{(x+2y+1)^2}$

$f_{11} = \frac{2}{(x+2y+1)^3}$ $\quad f_{12} = \frac{4}{(x+2y+1)^3}$ $\quad f_{22} = \frac{8}{(x+2y+1)^3}$

I $(0,0)$ $\quad f_1 = -1 \quad f_2 = -2$

$f_{11} = 2 \quad f_{12} = 4 \quad f_{22} = 8$

Insättning i formler ger mig:

$$P_2 = 1 - h - 2k + \frac{1}{2}(2h^2 + 8hk + 8k^2)$$

Liknande uppgift: $\frac{1}{(x+2y)}$ runt $(1,0)$

Kan göra på samma sätt som ovan, eller använda

$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots$ Vill uttrycka $f(x,y)$ i termer av

$x-1$ & y (h,k)

$$\frac{1}{x+2y} = \frac{1}{1+(x-1)+2y} = \frac{1}{1-u} \quad \text{där } u = -(x-1)-2y$$

$$= 1 + u + u^2 + \dots = 1-(x-1)-2y+((x-1)+2y)^2$$

$$= 1-(x-1)-2y+(x-1)^2+4(x-1)y+4y^2$$

~~[illegible]~~ : $x-a=h$ $y-b=k$

13.1 Extremvärden och kritiska punkter

$f(x,y)$ $\underset{U}{\overset{\cup\!\!|}{\mathbb{R}^2}} \to \mathbb{R}$ & ville hitta max och min-punkter (lokala, globala)

Sats: Om (a,b) är lokalt max eller min så gäller:
(1) $\nabla f(a,b) = 0$ eller
(2) $\nabla f(a,b)$ ej definerad eller
(3) (a,b) ligger på randen till U

Definition: En punkt där $\nabla f(a,b) = 0$ är en kritisk punkt. (Behöver ej vara (lokalt) max eller min). $\nabla f(a,b)$ kommer in i Taylorutvecklingar.

$P_2 \approx f(a,b) + (h,k) \cdot \nabla f(a,b) + \frac{1}{2}[h,k]H(f)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Om vi har en kritisk punkt så,

$f \approx P_2 = f(a,b) + \frac{1}{2}[h,k]H(f)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + \text{Felterm}$ Det betyder att får kontrollerad i en omgivning till (a,b) av Hessianen.

Ex $f(x,y) = x^2+y^2$, 1
$= x^2-y^2$, 2
$= -x^2-y^2$, 3

Runt $(0,0)$ kommer dessa vara P_2 av f med Hessianen $= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

I fall 1 så är $(0,0)$ ett minimum
I fall 2 så är $(0,0)$ en s.k. sadelpunkt
I fall 3 så är $(0,0)$ ett maximum.

Jämför med fallet i en variabel

Hessianen $\leftrightarrow$ f''

ör
ritiska
unkter

(envariabel)

$f''>0$ 

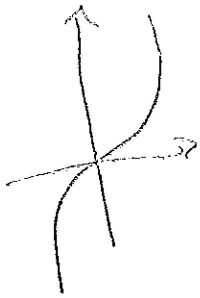
$f''<0$ 

$f''=0$ ger ingen information

Ex $f(x,y)=x^3+y^3$, runt $(0,0)$

$$H(f)=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y\end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(0,0)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Motsvarar "ungefär": $f(t)=t^3$ $f''(0)=0$



Ex $f(x,y)=\cos(x+y)-1$, runt $(0,0)$

$$\cos(t)=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\dots \quad \text{osv.}$$

$$f(x,y)=\cos(x,y)-1=-\frac{t^2}{2!}+\dots$$

$$P_2=-\frac{(x+y)^2}{2}=-\frac{x^2}{2}-xy-\frac{y^2}{2}$$

Vilken innehåller Hessianen för kritiska punkter?

$[h,k]H(f)\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix} = f_{11} \cdot h^2 + f_{12} \cdot 2hk + f_{22} \cdot k^2$

Om den här kvadratiska formen alltid är positiv, så motsvarar det $f'' > 0$

$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{2}\underbrace{(f_{11} \cdot h^2 + f_{12} 2hk + f_{22} \cdot k^2)}_{}$

$\Rightarrow$ Då måste $f(a,b)$ vara ett lokalt minimum.

Definition: (1) $H(f) = M$ = matris är positivt definit om $[h,k]M\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}$ bara tar positiva värden (dvs. ej negativa)

(2) $H(f) = M$ = matris är neg. definit om $[h,k]M\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}$ bara tar negativa värden

(3) $H(f) = M$ = matris indefinit om $[h,k]M\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}$ tar både neg. & positiva värden.

Sats: Om $\nabla f(a,b) = 0$ dvs. (a,b) kritiskpunkt till f

Så i fall (1) lokalt minimum
(2) lokalt maximum
(3) sadelpunkt

Annars är $H(f) = 0$ och vi får ingen information.

Från linjär algebra: Matriser kan (oftast) diagonaliseras. dvs. man kan göra ett linjärt variabelbyte s.a. matrisen är på formen:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Den motsvarande kvadratiska formen är:

$$\lambda_1 h^2 + \lambda_2 k^2$$

- $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ (t.ex. $= 1$) $= \sim h^2 + k^2$
- $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ (t.ex. -1) $= \sim -h^2 - k^2$
- $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$ (t.ex. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$) $= \sim h^2 - k^2$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ $\Rightarrow -k^2$

Finns ett test att tillämpa:

(1) Räkna ut egenvärden till matrisen $\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$

(2) $f_{11} = A$ $f_{12} = B$ $f_{22} = C$

* $B^2 - AC < 0$ $A > 0$ pos. definit
* $B^2 - AC < 0$ $A < 0$ neg. definit
* $B^2 - AC > 0 \Rightarrow$ Indefinit
* $B^2 - AC = 0$ ger ingen info ($B^2 - CC = -\det$(Hessianen) $= -\lambda_1 \lambda_2$)

Ex Bestäm och klassificera kritiska punkter till $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = 3x^2 - 3y \\ f_2 = 3y^2 - 3x \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla f = 0 \text{ om } f_1 = 0,\ f_2 = 0$$

$\Rightarrow x = y^2$ $y = x^2$ $\Rightarrow x = 1, y = 1$ eller $x = 0$ $y = 0$

	$x=y=0$	$x=y=1$	
$f_{11} = 6x$	0	6	A
$f_{12} = -3$	-3	-3	B
$f_{22} = 6y$	0	6	C

I fallet $(x=y=0)$, $B^2 - AC = (-3)^2 = 9 > 0$

Testet ger att $(0,0)$ är en sadelpunkt

I fallet $(x=y=1)$, $B^2 - AC = 9 - 36 = -27 < 0$

& $A > 0 \Rightarrow$ pos. definit

Sammanfattning: $(0,0)$ = sadelpunkt

$(1,1)$ = lok. minimum

Annat sätt:

P_2 runt $(0,0)$ $\Rightarrow$ kastar bort alla xy-termer av grad:

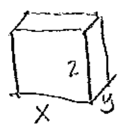
$f(x,y) = x^3+y^3-3xy$

$P_2 = -3xy$

$x = u-v$

$y = u+v$ $\Rightarrow P_2 = -3(u-v)(u+v) = -3(u^2-v^2) = 3u^2+3v$

Ex



← Box.

Bestäm största möjliga area

Bestäm minsta möjliga area

Om volymen = 5

Arean = $2xy + 2yz + 2xy$

Volymen = $x \cdot y \cdot z = 5 \Rightarrow z = \frac{5}{xy}$

Maximera eller minimera funktionen:

$f(x,y) = 2x \cdot \frac{5}{xy} + 2y \cdot \frac{5}{xy} + 2xy = \frac{10}{y} + \frac{10}{x} + 2xy$

Maximal area finns ej (x & $y \gg 0$, godtyckligt stora)

Minimal area: Hitta en kritisk punkt.

$f(x,y) = \frac{10}{y} + \frac{10}{x} + 2xy$

$f_1 = 2y - \frac{10}{x^2} = 0 \quad y = \frac{5}{x^2}$

$f_2 = 2x - \frac{10}{y^2} = 0 \quad x = \frac{5}{y^2}$

$x = \frac{5}{y^2} = \frac{5}{\left(\frac{5}{x^2}\right)^2} = \frac{x^4}{5}$

$x \neq 0 \quad 5 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{5}$

$x = \sqrt[3]{5}$

$y = \sqrt[3]{5}$

$z = \sqrt[3]{5}$

Skulle kunnat prata om

$f(x,y,z)$ max & min

$\nabla f = 0 \ldots$ Hessian $= \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{1\ldots} \\ f_{21} & f_{22} & f_{2\ldots} \\ f_{31} & f_{32} & \ldots \end{pmatrix}$

3-variabelfallet mycket svårare.

3.2 Extremvärden med randvilkor

Vill hitta max & min där vi har en given region

exempel: Hitta max och min till $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x,y)$

Rättning till 13.1

Errata: $f(x,y) \approx P_2$ använde bara P_1

$$f(x,y) = P_2 + \text{felterm}$$

Detta gör att vi måste ge starkare påståenden:

Kritisk punkt (a,b) Hessianen till f	är		
	1)	positivt definit	lokalt min
	2)	negativt definit	lokalt max
	3)	indefinit	sadelpunkt
	4)	varken eller	testet ger ej information.

1) strikt positiva egenvärden
2) strikt negativa egenvärden
3) ett pos. och ett neg. egenvärde
4) åtminstone 1 egenvärde = 0

Test: $B^2 - AC$ $A = f_{11}$, $B = f_{12}$ $C = f_{22}$ (gäller fortfarande)

Boken har definerat en sadelpunkt som en kritisk punkt som varken är lokalt max eller min.

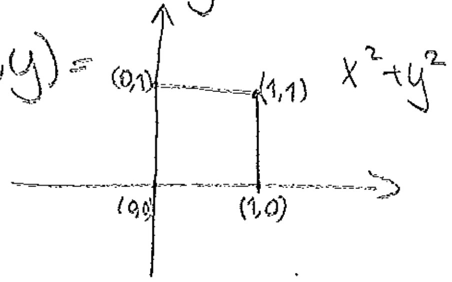
(Jag def. Hessianen indefinit $\Leftrightarrow$ $f(x,y) \sim f(a,b) + (h^2 - k^2)$)

13.2 Extremvärden med bivillkor

Vill titta på extremvärden till $f(x,y)$ över domäner som ges av villkor i stil med $g(x,y)=0$ $g(x,y)\leq c$, eller flera villkor.

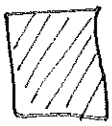
Ex Hitta max och min till $f(x,y)=x^2+y^2$ på kvadraten som är begränsad av hörnen $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$

$f(x,y)=$ x^2+y^2



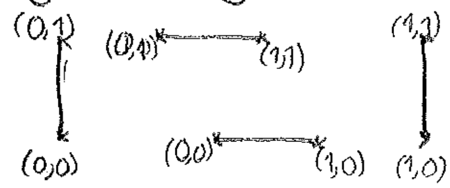
Med kritiska punkter, så får vi snarare:

För att hitta lokala max & min, titta på rand, $\nabla f=0$ eller ∇f odef.



$\nabla f=(2x,2y)=0 \Rightarrow x=y=0$ detta är ett alt.

På randen, så får man titta på varje givet segment dvs.



x = ränder på dessa intervall

1:a fallet: linjen mellan $(0,0)$ och $(0,1)$ kan vi parametrisera med $x=0$ $y=t$ $0\leq t\leq 1$

$f(x,y)=f(0,t)=t^2$

$f'(t)=2t=0 \Rightarrow t=0$ $(x,y)=(0,0)$ en ny kandidat

linjen mellan $(0,1)$ & $(1,1)$ $x=t$ $y=1$

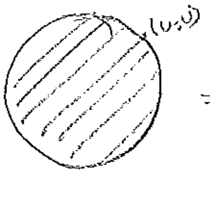
$f(x,y)=f(t,1)$ $f'(t)=2t=0 \Rightarrow t=0$ $(0,1)$ en kandidat till max & min

Får kandidater $\underbrace{\overbrace{(0,0),(0,1),(1,0)}^{\text{randpunkter (på randen)}},(1,1)}_{\text{kritiska punkter}}$

Testa: $(0,0)$ min, $(1,1)$ maximum

x

Hitta max och min till $f(x,y) = ax + by$ på disken $x^2 + y^2 \leq 1$ för några $a, b \in \mathbb{R}$



Hitta kritiska punkter, $\nabla f = (a,b) \neq 0$ (om inte $(a,b) = 0$)

$\Rightarrow$ max och min måste ligga på randen dvs. $x^2 + y^2 = 1$

Kan parametrisera randen: $x = \cos t$, $y = \sin t$

$g(t) = f(x,y) = a \cos t + b \sin t = au + bv$

$g'(t) = a \cdot -\sin t + b \cdot \cos t = 0, = a(-v) + bu = 0$

$\Rightarrow (a,b)$ är vinkelrät mot $(-v,u)$, alt att (u,v) är parallell med (a,b) (multipel av a,b)

$(u,v) = \pm \frac{(a,b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (Ploss ger max minus ger min)

$\Rightarrow$ max till $f(x,y) = ax + by$ på $x^2 + y^2 \leq 1$ ges av: $\sqrt{a^2+b^2} = \frac{a \cdot a + b \cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

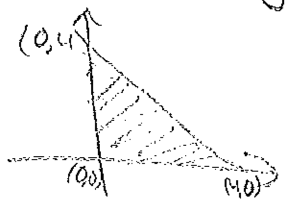
min ges av $-\sqrt{a^2+b^2}$

Har ett namn: Cauchy-Schwarz' olikhet:

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{x} \cdot \vec{y} \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$

Från boken, Ex

Hitta max och min till $f(x,y) = x^2 y e^{-(x+y)}$ på området begränsat av $x=0$, $y=0$, $x+y=4$



Först: Försök hitta kritiska punkter sen kolla hörn(=rand till ränder)

$\nabla f = (f_1, f_2) = 0$

$f_1 = xy(2-x)e^{-(x+y)} = 0$ $\quad e^{-(x+y)}$ är aldrig 0!

$f_2 = x^2(1-y)e^{-(x+y)} = 0$ $\quad x=y=0$ eller $x=2, y=1$

$x=0$ y=valfritt

- Så om x-eller $y=0 \Rightarrow f(x,y)=0$ måste vara min. eftersom $f(x,y) \geq 0$
- $x=2$ $y=1$ kritisk punkt $f(2,1) = 4e^{-3}$ och (2,1) ligger verkligen i området/bivillkoret

Kolla ränder i
- ~~$x=0$~~
- ~~$y=0$~~

redan kollat, inkluderar hörnen.
- $x+y=4$ $\quad y=4-x$

Bara kolla $y=4-x$ $\quad f(x,y) = f(x, 4-x) = x^2(4-x)e^{-4}$

$f'(x) = 8x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x=0$ eller $x=\frac{8}{3}$

- $f(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}) = \frac{256}{27} \cdot e^{-4}$
- Man kollar helt enkelt vilken av (2,1) eller $(\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$ som ger störst resultat, detta är max.

(2,1) blir efter test max.

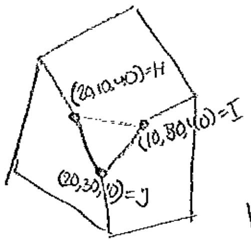
Ex Optimera $P(x,y,z) = 20x + 14y + 12z$

med villkoren $0 \le x \le 20$

$0 \le y \le 30$

$0 \le z \le 40$

$6x + 3y + 2z \le 230$



Kritiska punkter: $\nabla P = (20, 14, 12) \neq (0,0)$

$\Rightarrow$ Finns ej kritiska punkter $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Max måste ligga på randen.

Inte omöjligt men svårt/tidskrävande att parametrisera alla ränder.

∇P mäter också vilken riktning P ökar mest i.

$\Rightarrow$ P kommer ha max i hörn.

Måste vara hörnen H, I eller J, eftersom $20>0$, $14>0$, $12>0$

Testa: $\left.\begin{array}{l} P(H) = 1020 \\ P(I) = 1100 \\ P(J) = 940 \end{array}\right\} \Longrightarrow$ Max ges i punkten $I = (10,30,40)$

13.3 Lagranges Metod

Exempel på formen maximera eller minimera $f(x,y)$ med bivillkoret $g(x,y)=0$ (och $H(x,y)=0, \dots$)

Förut minimerade och maximerade vi genom att parametrise. kurvan $g(x,y)=0$ och sen derivera m.a.p. t

Parametrisera $g(x,y)=0$ genom $x=x(t)$, $y=y(t)$

Kritiska punkter på $f(x,y)$ längs $g(x,y)=0$ ges av kritiska punkter till $F(t)=f(x(t),y(t))$

$F'(t)=f_1 x'(t)+f_2 y'(t)=0$ dvs $\nabla f \cdot (x', y')=0$

Om $(x',y')\neq 0$ så säger detta att ∇f är vinkelrät till tangenten till kurvan $g(x,y)=0$ vid $t=t_0$.

En annan vektor som är vinkelrät till tangenten ges av $\nabla g \Rightarrow \nabla f = \lambda \cdot \nabla g$ för något λ

<u>Sats.</u> Antag att $f(x,y)$ har ett lokalt max eller min på $(g(x,y)=0)$, i punkten (a,b) & * (a,b) ligger inte på några ändpunkter till kurvan $g(x,y)=0$

* $\nabla g(a,b)\neq 0$

$\Rightarrow$ då finns ett λ_0 s.a. (a,b,λ_0) är en kritisk punkt till $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$

dvs. om jag vill hitta max/min till $f(x,y)$ med bivillkor $g(x,y)$ så ska jag leta efter kritiska punkter på $L(x,y,\lambda) = f(x,y)+\lambda g(x,y)$ (λ är en variabel & λ_0=konstant)

dvs. $\frac{\partial L}{\partial x} = f_1+\lambda g_1 = f_x+\lambda g_x=0$

$\frac{\partial L}{\partial y} = f_2+\lambda g_2 = f_y+\lambda g_2=0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x,y)=0$

Ex Hitta kortaste avståndet mellan origo och kurvan som ges av ekvationen $x^2y=16$

Avståndet ges av $\sqrt{x^2+y^2}$, kan lika gärna titta på x^2+y^2.

Minimera $f(x,y)=x^2+y^2$, med bivillkoret $x^2y-16=0$

$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^2y-16)$

(1) $\frac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda xy=0$

(2) $\frac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda x^2=0$

(3) $\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2y-16=0$

(1) $\Rightarrow 2x(1+\lambda y)=0$

$x=0$ eller $1+\lambda y=0$ $\boxed{\lambda y=-1}$

x kan inte vara noll enligt (3).

(2) $\Rightarrow$ Multiplicera med y.

$2y^2+\boxed{\lambda y}x^2=0 \Rightarrow 2y^2-x^2=0$

$2y^2=x^2 \Rightarrow x^2y-16=0 \Rightarrow$

$2y^3=x^2y=16, \Rightarrow y^3=8 \quad y=\sqrt[3]{8}=2$

Om $y=2$ så är $x^2=8$ $x=\pm\sqrt{8}=\pm2\sqrt{2}$

Två punkter: $(\pm2\sqrt{2},2)$ som har avstånd:

$\sqrt{(\pm2\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{8+4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

Svar: Minsta avståndet är $2\sqrt{3}$

$\nabla f = (f_1, f_2)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{1+xy^2}} \cdot y^2$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{1+xy^2}} \cdot 2xy = \frac{xy}{\sqrt{1+xy^2}}$

i punkten $(2,-2)$ är $\nabla f = \left(\frac{2}{3}, \frac{-4}{3}\right)$

Funktionsytan:

$z = f(x,y)$ I punkten $(2,-2)$ så är $z = f(2,-2) = \sqrt{9} = 3$

Tangent planet går genom punkten $(2,-2,3)$ och har normal $(\nabla f, -1)$

$\nabla f(2,-2) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) \Rightarrow$ Tangent planet ges av ekvationen: $\frac{2}{3}(x-2) - \frac{4}{3}(y+2) - 1(z-3$

går genom punkten $(2,-2,3)$

Nivåytan genom $(2,-2)$: $f(x,y) = f(2,-2) = 3 = z$

Vi sätter $z=3$ i tangentplanets ekvation ovan:

dvs. $\frac{2}{3}(x-2) - \frac{4}{3}(y+2) - 0 = 0$

$2x - 4y - 12 = 0 \quad 2x - 4y = 12$

$x - 2y = 6$

Funktionsyta/graf: $(x,y,f(x,y))$
Nivåyta: $f(x,y,z) = 0$

2

$f(x,y) = x^2 + xy + y^3$

Vill räkna ut $f, f_1, f_2, f_{11}, f_{12}, f_{22}$

$f(1,-1) = -1$

$f_1 = 2x + y \qquad f_1(1,-1) = 1$

$f_2 = x + 3y^2 \qquad f_2(1,-1) = 4$

$f_{11} = 2 \qquad f_{11}(1,-1) = 2$

$f_{12} = 1 \qquad f_{12}(1,-1) = 1$

$f_{22} = 6y \qquad f_{22}(1,-1) = -6$

$P_2 = f(1,-1) + f_1(1,-1)(x-1) + f_2(1,-1)(y+1) + \frac{1}{2}\big(f_{11}(1,-1)(x-1)^2 + 2f_{12}(1,-1)(x-1)(y+1)$
$+ f_{22}(1,-1)(y+1)^2\big) = -1 + (x-1) + 4(y+1) + \frac{1}{2}\left(2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) + 6(y+1)^2\right)$

Ett alternativ är att skriva: $f(x,y) = x^2 + xy + y^3 \quad u = x-1 \quad v = y+1 \quad x = u+1 \quad y = v-1$
$= (u+1)^2 + (u+1)(v-1) + (v-1)^3$

Utveckla allt och kapa av efter grad 2.

Volymen $V = 2x \cdot 2y \cdot 2z$ också klart att z måste vara så stor som möjligt $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$

$\Rightarrow$ Maximera $V = 8x \cdot y \cdot c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$

Betrackta istället V^2 s.a. vi vill maximera

$$f(x,y) = V^2 = 64x^2y^2c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$f_1(x,y) = 64c^2\left(2xy - \frac{4x^3y^2}{a^2} - \frac{2xy^4}{b^2}\right) = 128c^2xy^2\left(1 - \frac{2x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$f_2(x,y) = 128c^2x^2y\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{2y^2}{b^2}\right)$$

Kritiska punkter: $f_1 = f_2 = 0$ $x = y = 0$ minimi

Kan anta $x \neq 0$ $y \neq 0 \Rightarrow 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{2y^2}{b^2} = 0 = 1 - \frac{2x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

dvs. $\frac{2x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{2y^2}{b^2}$

Löser ekv. $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ $y = \frac{b}{\sqrt{3}}$ $z = \frac{c}{\sqrt{3}}$

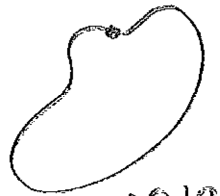
Kan ej vara sadelpunkt

$$V = 2x2y \cdot 2z = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot 8}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}$$

Kompletteringar

$r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, där $a \leq t \leq b$

Vi säger att kurvan är sluten om $r(a) = r(b)$ (kurvan är som en knut)



Vi säger att kurvan är enkel om kurvan inte korsar sig själv.

Längden till en kurva mellan a & b: $\int_a^b |r'(t)|\,dt$

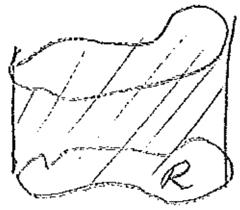
Kallas också båglängden.

$f: U \to V$, har vi kallat U domän, kallas också definitionsmängd.

7.1 Dubbelintegraler

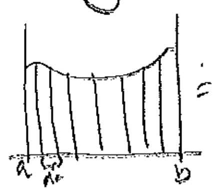
Om $\int_a^b f(x)\,dx =$ 

$=$ area

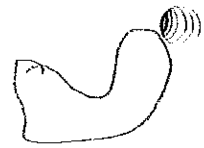
I flera variabler: $\iint_R f(x,y)\,dA =$ 

$=$ Volymen $\in$ xy-pl

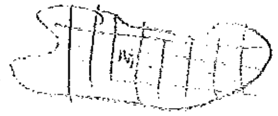
Formell definition av dubbelintegraler:

$\int_a^b f(x)\,dx =$ gränsvärde av staplar 

$= dx$ blir mindre och mindre

$*$ $f(x,y)$ (2 variabler), vill integrera över R 

$\iint_R f(x,y)\,dA \sim$ någon form av summa över boxar

$\sum_{ij} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \cdot$ Arean till A_{ij} där 

$(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in A_{ij}$ $\quad (x_{ij}^*, y_{ij}^*) =$ godtycklig punkt i rektangel A_{ij}

$P =$ uppdelningen i rektanglar

$R(f,P)_i = \sum f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, dx_i\, dy_j$

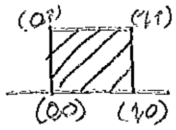
Definition: $\iint_R f(x,y) = I$ om $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$

så att $|R(f,P) - I| < \varepsilon$ om $|P| < \delta$

där $|P| =$ största diameter på boxarna A_{ij}

I detta fallet är $f(x,y)$ Riemanintegrerbar över R

Exempel då det blir fel, dvs. f ej Riemanintegrerbar

R=  $f(x,y)=\begin{cases} x \,\&\, y \text{ rationella} = 1 \\ \text{annars} = 0 \end{cases}$ $x=\frac{p}{q}$ pq heltal

Riemansumma $R(f,P)$ kan räknas ut på två sätt.

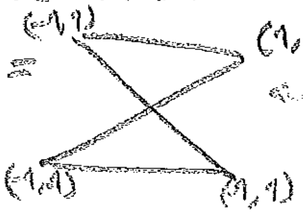
* Ta alla x_{ij}, y_{ij} rationella $= R(f,P)=1$
* Ta alla x_{ij}, y_{ij} ej rationella $= R(f,P)=0$

Sats. Om f är kontinuelig & R = sluten & begrän (kompa)
& R har en rand som består av kurvor av ändlig längd så är f Riemann-integrerbar

Några egenskaper till $\iint_R f(x,y)\,dA$

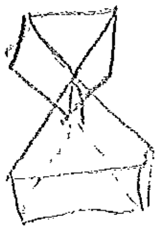
* $=0$ om R har area 0
* Om $f(x,y)\geq 0$ = Volymen till motsvarande graf: 
* Om $f(x,y)\leq 0$ = $\iint_R f(x,y) = -V$
* Linjär $\iint_R Af(x,y)+Bg(x,y) = A\iint_R f(x,y) + B\iint_R g(x,y)$
* Olikheter är bevarade: $f\leq g$ $\iint_R f \leq \iint_R g$
* Triangel olikheten: $\left|\iint_R f(x,y)\right| \leq \iint_R |f(x,y)|$
* Om $R=\bigcup_i D_i$ $(D_i \cap D_j \neq \emptyset$ om $i\neq j)$
  så är $\iint_R f(x,y) = \sum_i \iint_{D_i} f(x,y)$

Exempel som "inte" kräver någonting:

$f(x,y) = x^3 - 1$, $R =$ 

← "Symetrisk" i alla axlar

$$\iint_R f(x,y) = \iint_R (x^3-1)\,dA = \iint_R x^3\,dA - \underbrace{\iint_R 1\,dA}_{\text{Volymen av}}$$



x^3 är udda funktion, dvs. $(-x)^3 = -x^3$

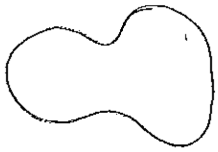
$\Rightarrow$ integralen $\iint_R x^3\,dA$ får för varje positivt bidrag ett lika stort negativt bidrag.

$\Rightarrow \iint_R x^3\,dA = 0$

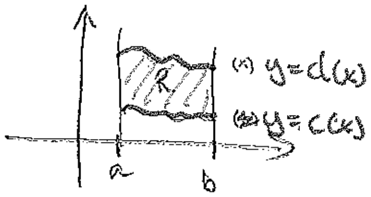
14.2 Upprepade integraler i xy-koordinater

$f(x,y)$ snälla: kontinueliga.

R = området är snällt



Utan mer information på R kan man inte säga något.



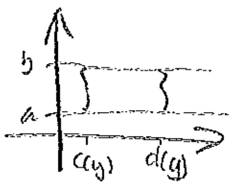
Viss typ av information: Fixera i x-axeln a & b

Annat sätt att skriva denna integralen:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

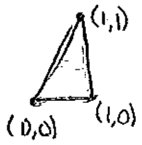
dy först, dx sen

Annat alternativ:



$$\iint_R f(x,y) = \int_a^b \int_{c(y)}^{d(y)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dy \int_{c(y)}^{d(y)} f(x,y)\,dx$$

Ex integrera $f(x,y)=xy$ över triangeln



I första fallet: x mellan 0 & 1

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_\Delta xy\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_x^1 xy\,dy\right)dx$$

I andra fallet: y mellan 0 & 1

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_\Delta xy\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^y xy\,dx\right)dy$$

Första fallet, först räkna $\int_x^1 xy\,dy = \left[x\frac{y^2}{2}\right]_x^1 = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2}$

$$\int_0^1\left(\int_x^1 xy\,dy\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x - x^3\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

→

Andra fallet: $\int_0^1 \left(\int_0^y xy\,dx \right) dy$

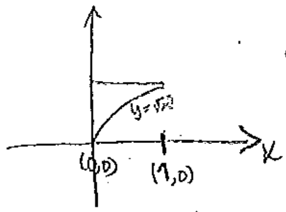
Först: $\int_0^y xy\,dx = \left[y\frac{x^2}{2} \right]_0^y = \frac{y^3}{2}$

$$\int_0^1 \left(\int_0^y xy\,dx \right) dy = \int_0^1 \frac{y^3}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y^3\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Ex Beräkna $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,dy \right) dx$

Försök integrera e^{y^3}. Går ej! (Går ej uttrycka i snälla termer)

Vad är området?



$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$

Istället för x mellan 0 och 1 så tar vi som första term: y mellan 0 & 1

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{y^3}\,dx \qquad \int_0^{y^2} e^{y^3}\,dx = \int_0^{y^2} \text{"konstant"}\,dx = y^2 \cdot e^{y^3}$$

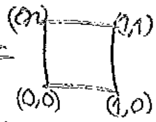
beror ju bara på y.

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,dy\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} e^{y^3}\,dx \right) dy = \int_0^1 y^2 e^{y^3}\,dy$$

Kan skriva om: $u = y^3 \quad du = 3y^2\,dy \quad y^2\,dy = \frac{du}{3}$

$$\int_0^1 e^u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int_0^1 e^u\,du = \frac{1}{3}\left[e^u \right]_0^1 = \frac{e-1}{3}$$

Enklare exempel

$f(x,y) = x \quad R =$ 

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^1 dx \int_0^1 x\,dy = \text{finns ej något i första integralen:}$$

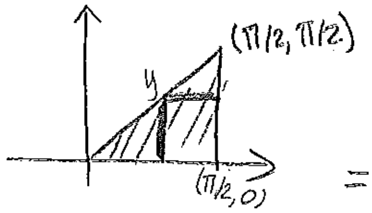
eller $\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

$$= \int_0^1 dy \int_0^1 x\,dx$$

Ex I samma anda som $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,dy\,dx$

$\int_0^{\pi/2} dy \int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx \leftarrow$ svårt att räkna ut primitiv funktion till $\frac{\sin x}{x}$ m.a.p x.

Området:

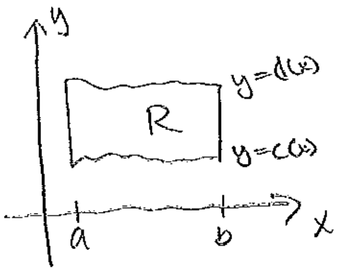


$$\iint_R \frac{\sin x}{x}\,dA = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dy =$$

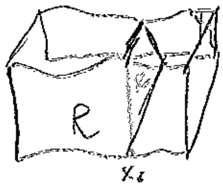
$= \frac{\sin x}{x}$ "som en konstant" map. y

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} \underbrace{\left(\int_0^x dy\right)}_{x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\,dx =$$

$$= \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} = 1$$



$$\iint_R f(x,y)\,dA = \text{"som en volym"}$$

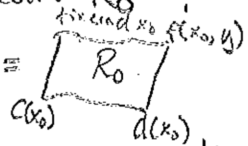


En volym är som en summa av areor

Volymen borde vara en summa av massa R_0

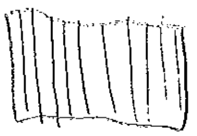
: Titta på $\displaystyle\int_a^b \text{area}(R_0)\,dx = \iint_R f(x,y)\,dA$

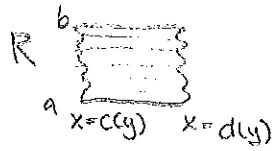
Arean $R_0 = ?$

$R_0 =$ 

Arean $R_0 = \displaystyle\int_{c(x_0)}^{d(x_0)} f(x_0,y)\,dy$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{c(x_0)}^{d(x_0)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy$$

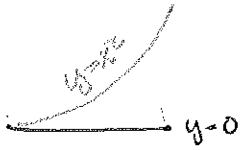
Idéen :  skiva upp som på bilden.

Annat alternativ : 

Skiva upp i annat led

$$\int_a^b \left(\int_{c(y)}^{d(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Ex



Fråga: Hur kan jag uttrycka $\iint_R f(x,y)\,dA$ på ovanstående sätt?

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \begin{bmatrix} a=0 & b=1 \\ y=d(x)=x^2 & \\ y=c(x)=0 & \end{bmatrix} = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\right)dx$$

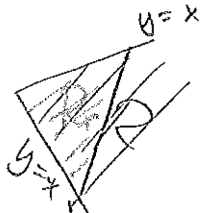
Alternativ:

$$\int_a^b \int_{c(y)}^{d(y)} f(x,y)\,dx\,dy = \begin{bmatrix} a=0 & b=1 \\ c(y)=\sqrt{y} & \\ d(y)=1 & \end{bmatrix} = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{1} f(x,y)\,dx\,dy$$

14.3 | Generaliserade integraler

I envariabel: Gick inte bara över intervall, men också oändligt långt bort.

Ex $\int_0^\infty e^{-x}dx \overset{?}{=} \lim_{r\to\infty}\int_0^r e^{-x}dx = \lim_{r\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^r = \lim_{r\to\infty}\left[\overset{\to 0}{-e^{-r}}+1\right] =$

Ex Integrera e^{-x^2} över 

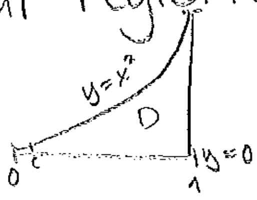
Första problemet: e^{-x^2} har ingen (enkel) primitiv funktion

$$\iint_R e^{-x^2}dA = \int_0^r\int_{-x}^{x} e^{-x^2}\,dy\,dx = \int_0^r 2xe^{-x^2}dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \end{bmatrix} =$$

$$\int_0^{r^2} e^{-u}du = \left[-e^{-u}\right]_0^{r^2} = -e^{-r^2}+1$$

$$\lim_{r\to\infty} -e^{-r^2}+1 = 1$$

Ex $\iint_D \frac{dA}{(x+y)^2}$ Där regionen $0\le x\le 1$, $0\le y\le x^2$

Först området 

litet problem: $x=y=0 \Rightarrow \frac{1}{(0+0)^2}$, ajaj!

$$\iint_D \frac{dA}{(x+y)^2} = \int_c^1\int_0^{x^2}\frac{1}{(x+y)^2}\,dy\,dx =$$

$$\int_0^{x^2}\frac{dy}{(x+y)^2} = \left[\frac{-1}{x+y}\right]_0^{x^2} = -\frac{1}{x+x^2}+\frac{1}{x+0} = \frac{1}{x}-\frac{1}{x\ldots}$$

$$\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x+1}\right) = \frac{x}{x(x+1)} = \ldots$$

$$= \int_c^1 \frac{1}{x+1}dx = \left[\ln(x+1)\right]_c^1 = \ln(2)-\ln(1+c)$$

då $c\to 0^+$ så $\ln(1+c)\to \ln 1 = 0$

Slutsats: $\iint_D \frac{dA}{(x+y)^2} = \ln(2)$

Kan absolut hända att en generaliserad integra inte konverterar:

* Om integranden är "för stor" $\int_0^1 \frac{1}{x}$ ← litet
  Så kan det divergera (motsats till konvergera)
* Om området är för stort i förhållande till integral
  Så kan det också integrera

- Riemann-integraler existerar bara "enkelt" om f är kont. & D är kompakt (sluten & begränsad)
- Alla andra integraler är generaliserade integraler.

f kont & D är kompakt

f har ett max & ett min

$b = (x, y) \quad a = (x_2, y_2)$

dvs. $f(a) \leq f(x,y) \leq f(b)$ för alla $(x,y) \in D$

- $$f(a) \underbrace{\iint_D dA}_{\text{Arean till } D} = \iint_D f(a)\, dA \leq \iint_D f(x,y)\, dA \leq \underbrace{\iint_D f(b)\, dA}_{f(b) \cdot \text{Arean till } D}$$

- $$f(a) \leq \frac{1}{\text{Area}(D)} \iint f(x,y)\, dA \leq f(b)$$

Vanlig variant av medelvärdessatsen säger att det finns $(x_0, y_0) \in D$ s.a. $\frac{1}{\text{area}(D)} \iint_D f(x,y)\, dA = f(x_0, y_0)$

→

(Medelvärdes)

Sats. Det finns $(x_0, y_0) \in D$ s.a. $\frac{1}{area(D)} \iint_D f(x,y)\,dA = f(x_0,y_0)$

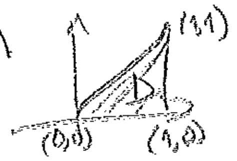
$f(x_0,y_0)$ = medelvärdet till $f(x,y)$ över D

Vag förklaring: $x_1, x_2 \ldots\ldots \quad = \frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}$

area $\approx n$

$\iint_D f(x,y)\,dA = \sum f(x_i)$

Ex Bestäm medelvärde till funktionen $f(x,y)=x$ på triangeln



2 saker att räkna ut: area(D) $= \frac{1}{2}$

: $\iint_D x\,dA$

$$\iint_D x\,dA = \int_0^1 \int_0^x x\,dy\,dx = \int_0^1 [xy]_0^x\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

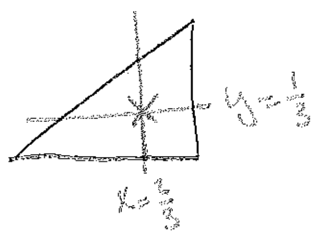
Samma fråga men $f(x,y)=y$

$$\int_0^1 \int_0^x y\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Medelvärdet: $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

Medelvärdet till $x = \frac{2}{3}$

$y = \frac{1}{3}$



Medelvärde till x^2+y^2 över samma triangel:

[Om man tar en punkt på måfå i triangeln, vad är f(x,y) ungefär?]

$$\int_0^1\int_0^x x^2+y^2\,dy\,dx = \int_0^1 \left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^x dx = \int_0^1 x^3+\frac{x^3}{3}\,dx =$$

$$\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^4}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{12} = \frac{3+1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Arean: $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Medelvärdet till $f(x,y)$ $\overset{\text{över triangeln}}{=}$ $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

Fördelningen på "singla slant": ① räkna efter ∞ ⊖1 många gånger

Gauß fördelning: Om man gör matten korekt så ser kurvan ut som $y=e^{-x^2}$ ungefär.

Hela arean ska vara 1,

$f(x)=c\cdot e^{-x^2}$ c sådant att $\int_{-\infty}^{\infty} ce^{-x^2}dx=1$ med andra ord

$$\frac{1}{c} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = I$$

$I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$, går ej utvärdera med envariabel metoder.

Trick: Istället för I^2:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

x^2+y^2 beror endast på avståndet $r=\sqrt{x^2+y^2}$ från origo

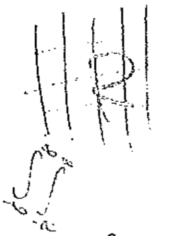
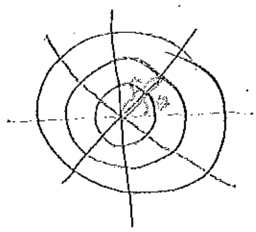
Gör en substitution $x=r\cos\theta$ $y=r\sin\theta$

$$\Rightarrow x^2+y^2=r^2 \quad \frac{y}{x}=\tan\theta$$

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2}\,dxdy$, Vill bara använda r & θ

Två saker händer: 1) ändra integrationsgränser

2) $dxdy$ måste bytas ut mot $drd\theta$

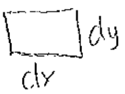
I fall 1:  

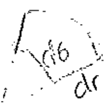
Gå mellan $0 \le \theta \le 2\pi$.

r går mellan 0 & ∞

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2}\,dxdy$$

Vad är $\frac{dxdy}{drd\theta}$ dvs. $dxdy = \square\, drd\theta$





$$\boxed{dxdy = r\,dr\,d\theta}$$

$$I^2 = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2}\cdot r\,drd\theta = \left[u=r^2 \quad \frac{du}{2}=rdr\right] = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-u}\cdot\frac{du}{2}\,d\theta =$$

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{2}\,d\theta = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Slutsats: $I^2 = \pi \Rightarrow I = \sqrt{\pi} \quad C = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

a) Bestäm riktningsderivatan till funktionen $f(x,y)=y^2+2xy-x^3$ i punkten $(2,1)$ & riktningen $\frac{3}{5}\mathbf{i}+\frac{4}{5}\mathbf{j}=u=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$

Vill hitta $D_u f(2,1)$

u är riktningen, ty u har längd 1: $\left(\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{9+16}{25}}=1\right)$

$D_u f=\nabla f(2,1)\cdot u=u\cdot\nabla f(2,1)=$

$\nabla f=(f_1,f_2)=(2y-3x^2,\ 2y+2x)$

$\nabla f(2,1)=(-10,6)$

$\nabla f(2,1)=-10\mathbf{i}+6\mathbf{j}$

$\nabla f(2,1)\cdot u=(-10,6)\cdot\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=-\frac{30}{5}+\frac{24}{5}=-6+\frac{24}{5}=-\frac{6}{5}$

Svar: $D_u f(2,1)=-\frac{6}{5}$

b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till $f(x,y)=\ln(x+2y)$ i punkten $(1,0)$ & Använd Taylorpolynomet för att bestämma ett approximativt värde till $f(1.1,\ 0.2)$

I en punkt (a,b), $f(a+h,b+k)\approx f(a,b)+\nabla f(a,b)\cdot(h,k)+$

$\frac{1}{2}[h\ k]$ Hessianen $f(a,b)\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}=f(a,b)+f_1(a,b)\cdot h+f_2(a,b)\cdot k+$

$\frac{1}{2}\left(f_{11}(a,b)h^2+2f_{12}hk+f_{22}(a,b)k^2\right)$

$(a,b)=(1,0)$

Räkna ut $f_1=\frac{1}{x+2y}=1$ $f_2=\frac{2}{x+2y}=2$ $f_{11}=-\frac{1}{(x+2y)^2}=-1$ $f_{12}=-\frac{2}{(x+2y)^2}=-2$

$f_{22}=-\frac{4}{(x+2y)^2}=-4$ $f(1,0)=\ln 1=0$

$P_2=h+2k+\frac{1}{2}(-h^2-4hk-4k^2)=h+2k-\frac{h^2}{2}-2hk-2k^2$

Hitta approx-värde: $h=x-1=1,1-1=0,1$
$k=y-0=0,2-0=0,2$

$P_2=0,1+0,4-\frac{0,01}{2}-0,04-0,08=0,375$

c) En partikel rör sig längs (rymd) kurvan $r(t)=\frac{2}{3}(t-2)^{3/2}\mathbf{i}+t\mathbf{j}+(t+1)\mathbf{k}$. Bestäm de tidpunkter $t=a$ & $t=b$ för vilka partikeln befinner sig i punkterna $(0,2,3)$ resp. $(\frac{2}{3},3,4)$ Bestäm sedan längden av kurvan mellan $r(a)$ & $r(b)$

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{3}(t-2)^{3/2}&=0\\ t&=2\\ t+1&=3\end{aligned}\right\}\ t=2$$

Man ser direkt att eftersom "y-variabeln" = t så $t=a=2$ $t=b=3$

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{3}(t-2)^{3/2}&=\frac{2}{3}\\ t&=3\\ t&=4\end{aligned}\right\}\ t=3$$

$$v(t)=r'(t)=\sqrt{t-2}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

$$|v(t)|=\sqrt{t-2+1+1}=\sqrt{t}$$

längden:

$$\int_2^3\sqrt{t}\,dt=\int_2^3\sqrt{t}\,dt=\left[\frac{2t^{3/2}}{3}\right]_2^3=\frac{2\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{3}-\frac{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}}{3}=$$

$$\frac{\sqrt{3}(6-4)}{3}=\frac{\sqrt{3}\cdot 2}{3}$$

2) Bestäm det största värde som funktionen $f(x,y,z) = x+y-z$ antar på sfären $x^2+y^2+z^2=1$

Notera att $x^2+y^2+z^2=1$ dvs. sfären är kompakt (sluten och begränsad) $\Rightarrow$ globala max & min existerar.

Vill hitta kritiska punkter till Lagrangianen:

$L(x,y,z,\lambda) = f+\lambda g = x+y-z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$

Vill hitta $x_0, y_0, z_0, (\lambda_0)$ så att $\frac{\partial L}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial L}{\partial y}=0 \quad \frac{\partial L}{\partial z}=0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0$

- $\frac{\partial L}{\partial x} = 1+2\lambda x = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial y} = 1+2\lambda y = 0 \quad \Rightarrow x = y \quad \lambda = \frac{1}{2x}$

$\frac{\partial L}{\partial z} = -1+2\lambda z = 0 \qquad -1+2\cdot\frac{1}{2x}\cdot z = 0$

$-1+\frac{z}{x}=0$

$z=-1$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2+y^2+z^2-1$

Slutsats: $x=y=-z$

- $3x^2-1=0 \quad x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

2 alternativ till max (som vi vet finns)

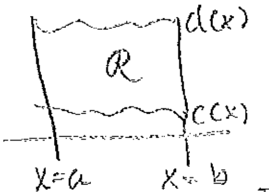
- Punkt 1: $\left(\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}\right)$ $f(P_1) = \frac{1}{\sqrt3}+\frac{1}{\sqrt3}+\frac{1}{\sqrt3} = \frac{3}{\sqrt3} = \sqrt3$

Punkt 2: $\left(-\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right)$ $f(P_2) = -\frac{1}{\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt3} = -\frac{3}{\sqrt3} = -\sqrt3$

Svar: Max: $\sqrt3$

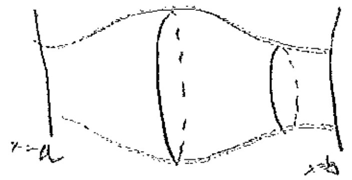
Min: $-\sqrt3$

Minirep.

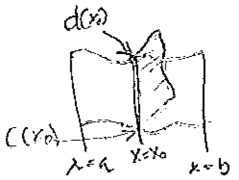


$$\iint_R f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy$$

För att beräkna så skivar vi upp området



Summan av alla skivors area  = volymen



$\int_{c(x_0)}^{d(x_0)} f(x_0,y)\,dy$ Måste få med alla x_0, där integrerar/(summerar) över alla x s.a. $a \leq x \leq b$

14.4 Polära koordinater & koordinatsystem

Vi behövde göra variabelbyte för att räkna ut

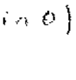
$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ eller snarare $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$

Situation där integranden endast beror på $r = \sqrt{x^2+y^2}$. 2 grejer som jag underströk!

1) ändra integrationsränserna då man byter $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$

2) ändra $dxdy$ till $\boxed{?}\, dr\,d\theta$ $\boxed{\begin{matrix} u = f(x) \\ du = f'(x) \end{matrix}}$

1) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint_R e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ $R \overset{?}{=}$ hela $\mathbb{R}^2$ (så exempel på generaliserad integral + området är obegränsat)

I stället i termer av r & θ  $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

För att få med hela planet $\mathbb{R}^2$ så $0 \leq r \leq \infty$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

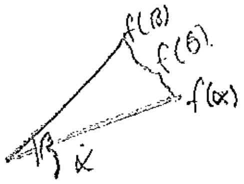
$\Rightarrow \iint_R e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,dx\,dy$ →

2) Man kan visa (snart) att $dxdy = r\,dr\,d\theta$

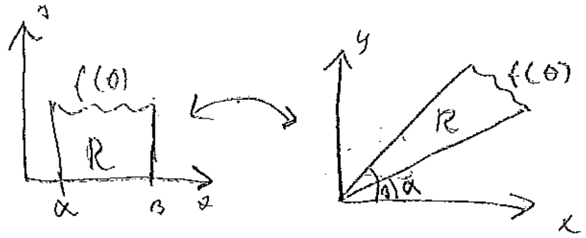
$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \sqrt{\pi}$$

Exempel på ett variabelbyte: $x = x(s,t)$ $y = y(s,t)$
där s & t är väl valda variabler.

Ex Polär yta ges av $r = f(\theta)$ $\alpha \le \theta \le \beta$

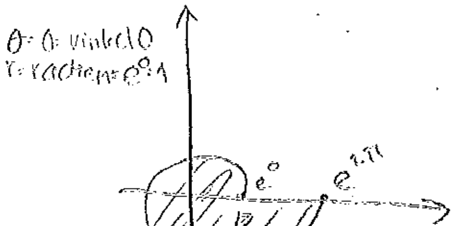


Vad är arean av området bestämt av den polära ytan?



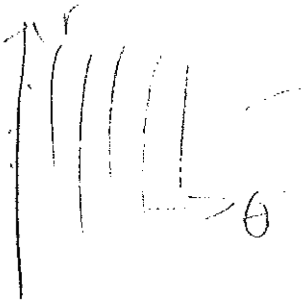
Arean: $$\iint_R dxdy = \int_\alpha^\beta \int_0^{f(\theta)} r\,dr\,d\theta = \int_\alpha^\beta \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{f(\theta)} d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2\,d\theta$$

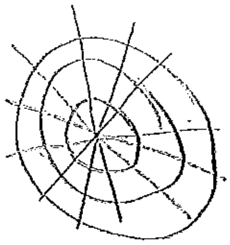
Ex Beräkna arean av ytan bestämd av $r = e^{\theta}$ $0 \le \theta \le 2\pi$ och som begränsas av x-axeln.



Formeln ger area: $$\int_0^{2\pi} (e^{\theta})^2\,d\theta = \int_0^{2\pi} e^{2\theta}\,d\theta = \left[\frac{e^{2\theta}}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{e^{4\pi}}{2} - \frac{1}{2}$$

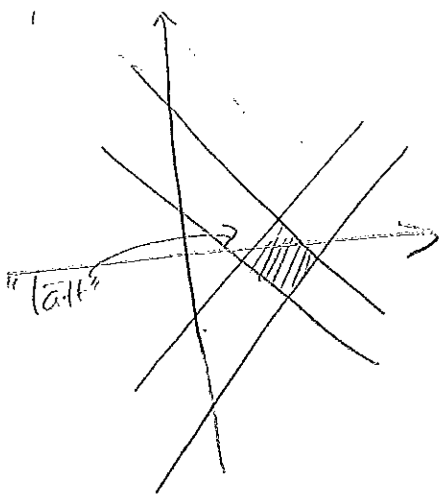
Polära koord är bra om man har något som beror på (r,θ)





Ex Bestäm arean av området som begränsas av $x+y=3$, $x+y=4$, $x-y=1$, $x-y=2$

$y=x-1$
$y=x-2$
$y=3-x$
$y=4-x$



kan vara bra att göra variabelbytet i

$u=x+y$ Då blir gränserna lätta: $3\leq u\leq 4$
$v=x-y$ $1\leq v\leq 2$

Det enda som fattas är att beräkna $dxdy=\boxed{?}dudv$

Ett variabelbyte $x=x(s,t)$ $y=y(s,t)$ är en omskrivning av området i andra koordinater: Vi kräver:

1) Om vi har $D\subseteq(s,t)$-planet, $C\subseteq(x,y)$-planet
Så ska funktionen $(x(s,t),y(s,t))$ avbilda 1-till-1 området D på C.

2) Här betyder 1-till-1 att i $D\to C$
$(s,t)\mapsto(x(s,t),y(s,t))$
Varje element i C träffas av något element i D
Varje element i D går på en unik punkt/element i C

Frågan är: Relationen mellan $dsdt$ & $dxdy$?

Vi vill hitta relation m.h.a kedjeregeln:
(don't do this at home)

$g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$\rightsquigarrow$ liten omskrivning:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial s} \cdot ds + \frac{\partial x}{\partial t} \cdot dt$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial s} \cdot ds + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot dt$$

- Går att skriva i matrisnotation:

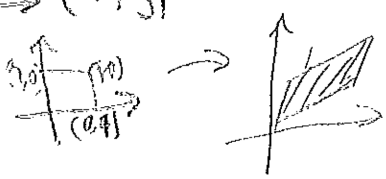
$$(dx\,dy) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ds \\ dt \end{bmatrix}$$

- ds och dt är jättesmå längdenheter i (s,t)-planet

Vad är då $dxdy = \boxed{????}\, drdt$

Om man har linjär avbildning $(s,t) \mapsto (x,y)$

$\Rightarrow$ arean av bilden av enhetskvadrat



är lika med $|\det A|$

Alltså är: $dxdy = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} ds\,dt$

- $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$ = Jacobimatrisen för $x = x(s,t)$ $y = y(s,t)$

- dilation: $\det A = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right|$

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right| ds\,dt$$

Jämför envariabelfallet $u = f(x)$ $du = f'(x)dx$

Det som ersätter "$f'(x)$" är det av Jacobimatrisen.

Ex $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$ (dvs. polära koordinater)

$$\text{Jacobi-matrisen} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = A$$

$$\det A = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

dvs. $dxdy = r\,dr\,d\theta$

notera att om man t.ex. byter ordning på r & θ dvs.

$x = x(r,\theta) = r\cos\theta$, $x = x(\theta, r) = r\cos\theta$

så får man en matris med rader eller kolonner switchade $\Rightarrow$ $\det(A) = -r$

<u>Sats</u>: Låt $D \to C$ vara ett variabelbyte där funktionerna har kontinueliga partiella derivator och anta att $f(x,y)$ är integrerbar på C.

Om $g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$ så gäller:

$$\iint_C f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D g(s,t) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \right| ds\,dt$$

använt att jag kan gå $D \to C$

$(s,t) \to (x(s,t), y(s,t))$

$(s(x,y), t(x,y)) \Leftarrow (x,y)$

Man ser också speciellt att $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \right| = \frac{1}{\left| \frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} \right|}$

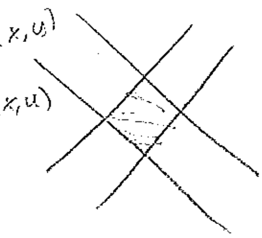
<u>Exempel innan</u>

$x+y=3$ $x+y=4$

$x-y=1$ $x-y=2$

$u = x+y = u(x,y)$

$v = x-y = v(x,y)$



$$\text{Jacobimatrisen} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| = |\det(\ )| = |-2| = 2$$

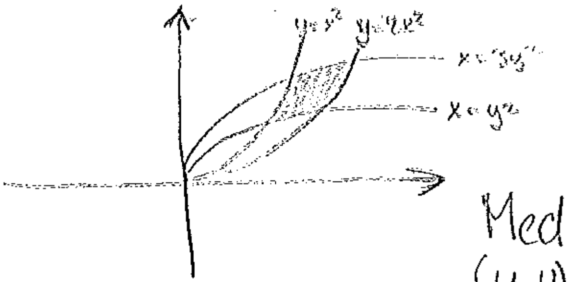
$$du\,dv = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| dx\,dy = 2\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow dx\,dy = \frac{1}{2} du\,dv$$

Arean: $\iint dx\,dy = \frac{1}{2} \int^2 \int^4 du\,dv = \frac{1}{2}$

Exempel från boken

Hitta arean till området som begränsas av
$y=x^2 \quad y=2x^2, \quad x=y^2 \quad x=3y^2$



$1=\frac{x^2}{y}$ Låter rimligt att sätta $u=\frac{x^2}{y}$
$\frac{1}{2}\le u\le 1$

$\frac{1}{2}=\frac{x^2}{y}$ På samma sätt: $v=\frac{y^2}{x}$ $\frac{1}{3}\le v\le 1$

Med andra ord: integrationsområdet över
(u,v) är $\frac{1}{2}\le u\le 1$, $\frac{1}{3}\le v\le 1$

Jacobimatrisen: $\begin{pmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{pmatrix}=A$ $\quad \det A=\frac{2x}{y}\cdot\frac{2y}{x}-\frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{y^2}=$
$=4-1=3$

Alltså är $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=3$, $du\,dv=3\,dx\,dy$

$\Rightarrow dx\,dy=\frac{1}{3}\,du\,dv$

Arean: $\iint_R dx\,dy=\int_{1/2}^{1}\int_{1/3}^{1}\frac{1}{3}\,du\,dv=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}$

Väldigt kort om trippelintegraler

14.5

(Vi återkommer nästa gång)

Definitionen av trippelintegraler är "samma" som för dubbelintegraler (Riemann-summor)

Samma typ av satser gäller:

T.ex. $\iiint_R dV$ = Volymen till R

$\iiint f(x,y,z)dV$ = hypervolym

Oftast finns fler tolkningar. T.ex. kan man ta $f(x,y,z)$ = densiteten i punkten (x,y,z)

$\iiint_R f(x,y,z)dV$ = Massa till objektet R