Flervariabelanalys

del av kursen TMS063

De flesta tillstånd/förlopp man vill beskriva/studera beror inte bara på en variabel utan oftast på flera variabler/parametrar

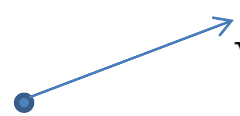
$$F = \frac{g \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad M = \frac{Pr/12}{1 - \left(\frac{1}{1+r/12}\right)^{12t}}$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \qquad P = b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha}$$

$$w = \cos\left(1.7 \cdot 10^{-2} t - 0.2x\right) \cdot e^{-0.2x}$$

Ett tillstånd hos en partikel/objekt beror normalt också på dess position (x, y, z) och ev. tidpunkt t

t.ex. temperatur, tryck, massa, position, hastighet, accelleration, mm

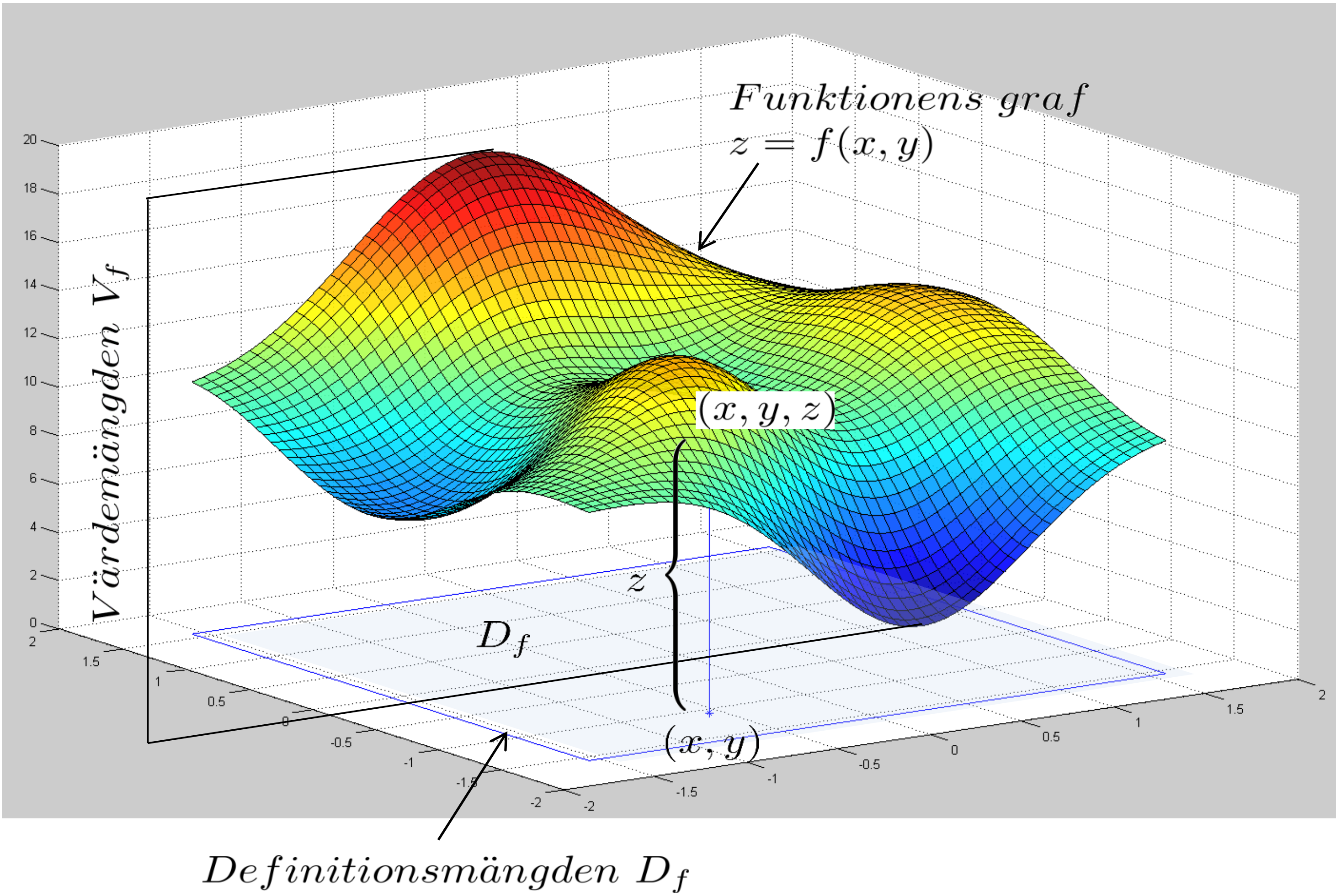

$\mathbf{v}(x, y, z, t)$

$\rho(x, y, z, t)$

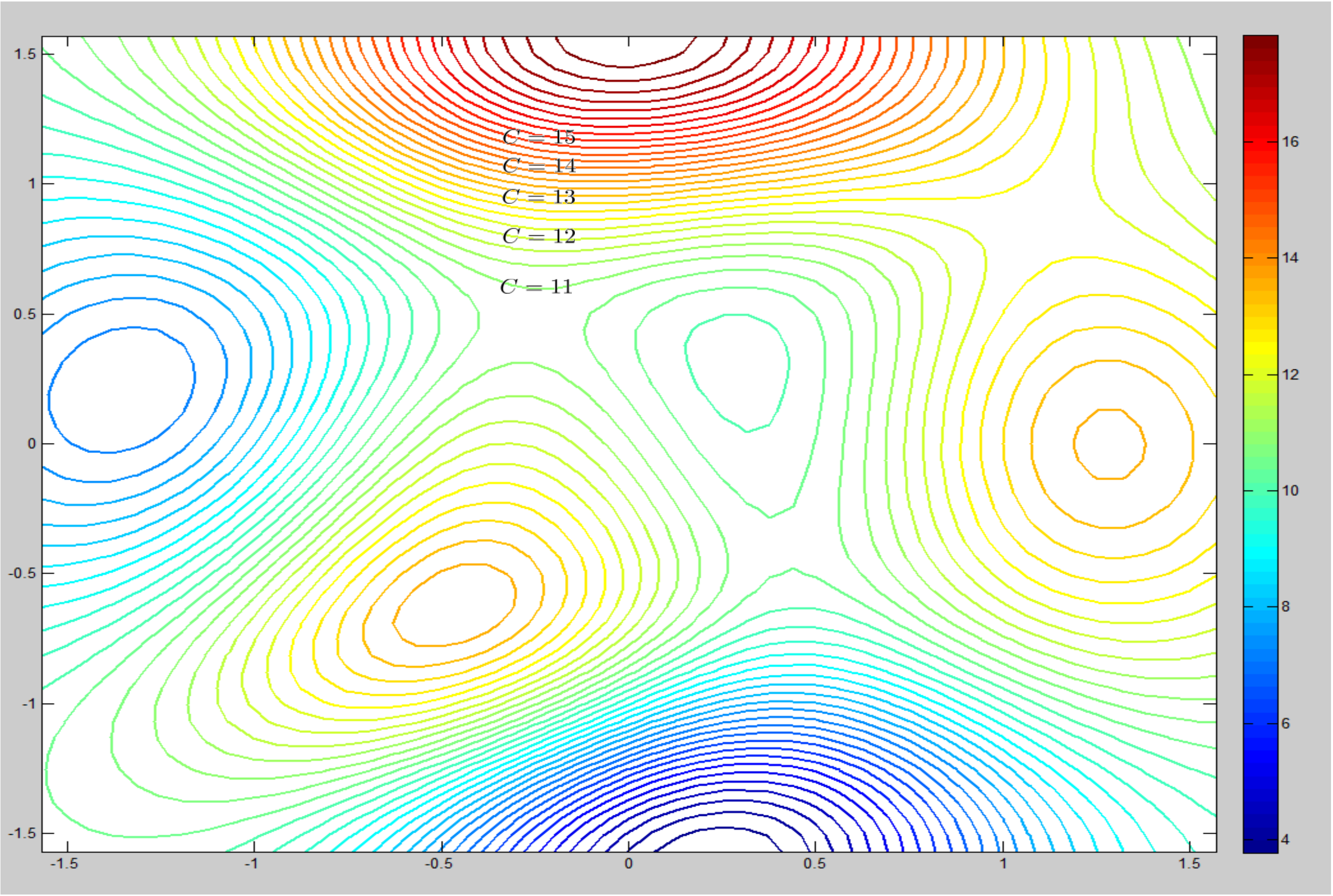
Vi skall börja med att studera reellvärda funktioner av två variabler

$$f(x, y)$$

En reellvärd funktion $f(x, y)$ av två variabler kan åskådliggöras t.ex. genom att skissa/plotta dess **graf** i rummet.



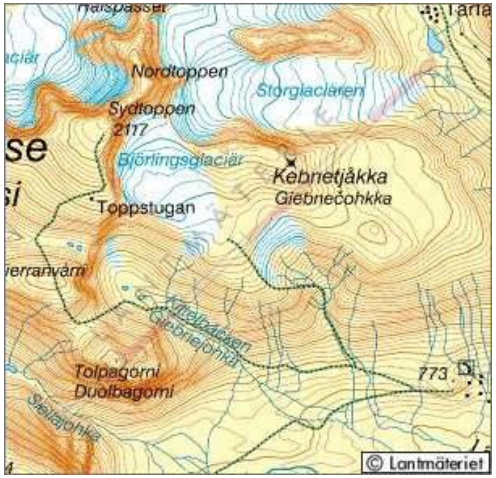
En reellvärd funktion $f(x, y)$ av två variabler kan också åskådliggöras genom att plotta s.k. **nivåkurvor**.



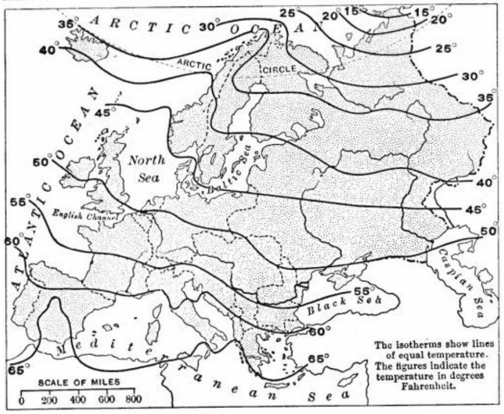
Varje nivå kurva är lösningsmängden till en ekvation av typen

$$f(x, y) = C$$

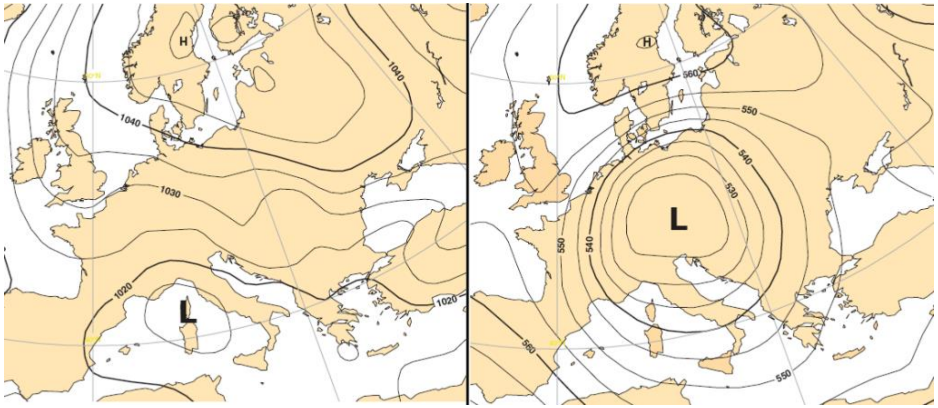
Nivåkurvor används bl.a. för att illustrera nivåskillnader på vanliga topografisk kartor



eller för att illustrera temperaturer och/eller lufttryck på meterologiska kartor

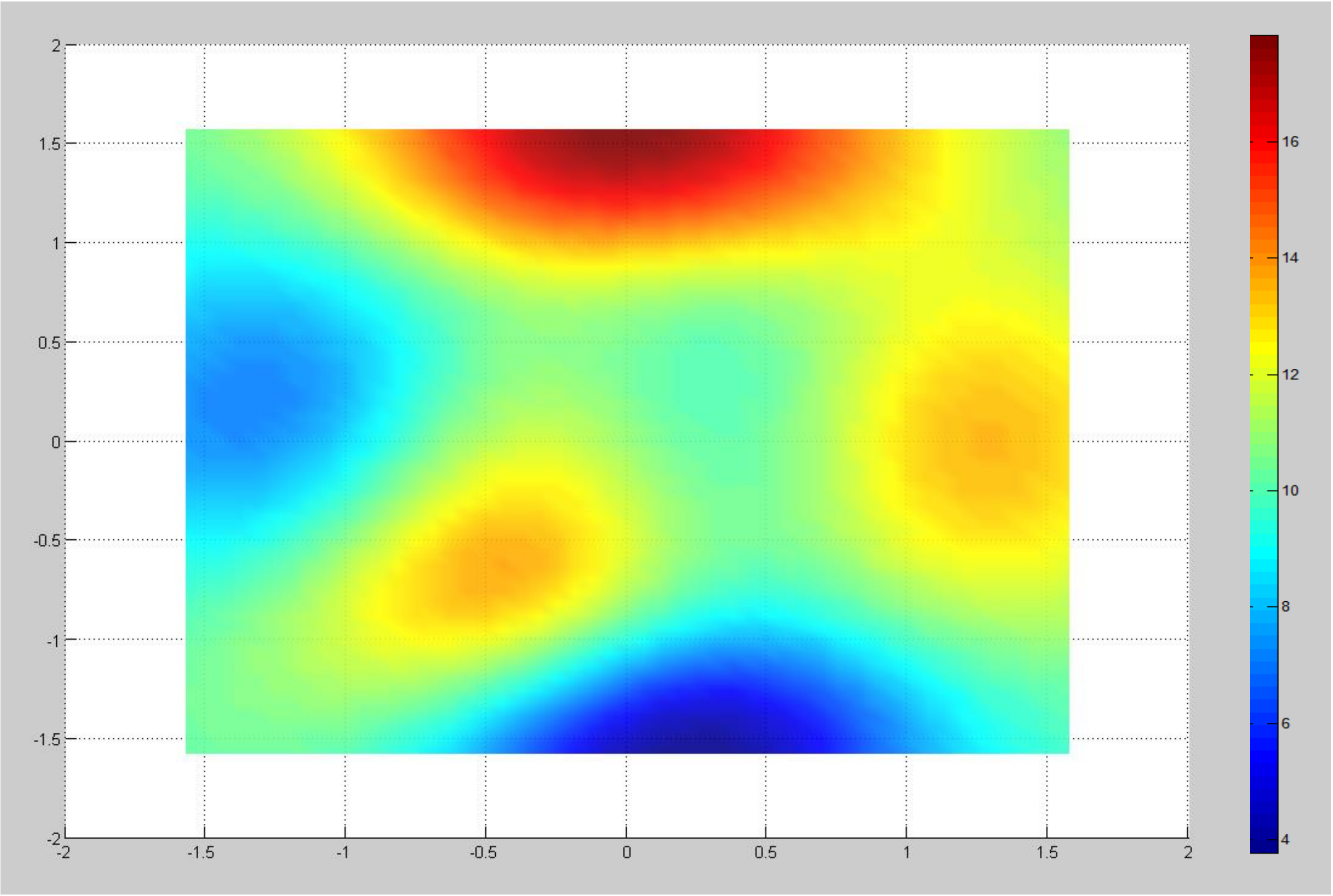


isotermer

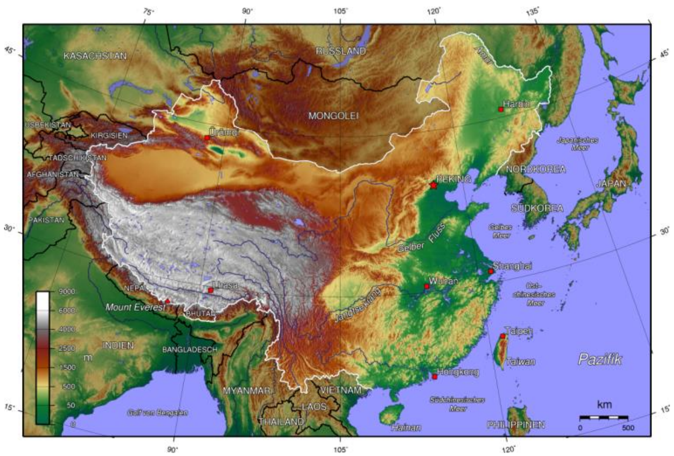


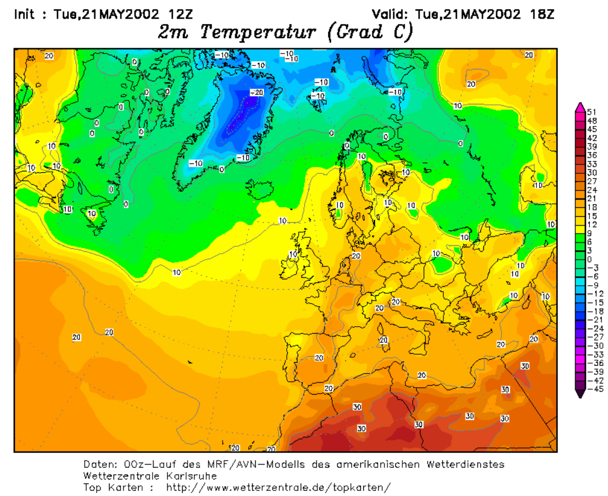
isobarer

...eller så använder man bara färger för att beskriva olika nivåer.

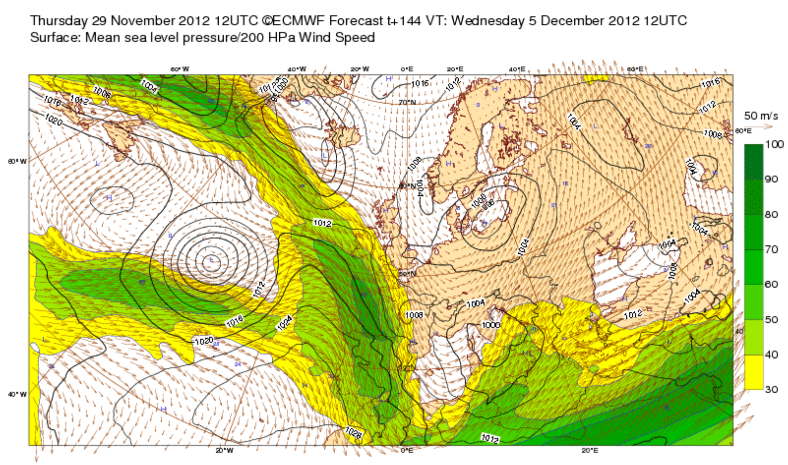


... som på dessa kartor





... eller så kombinerar man färger och nivåkurvor för att få med mycket information och illustrera samband.

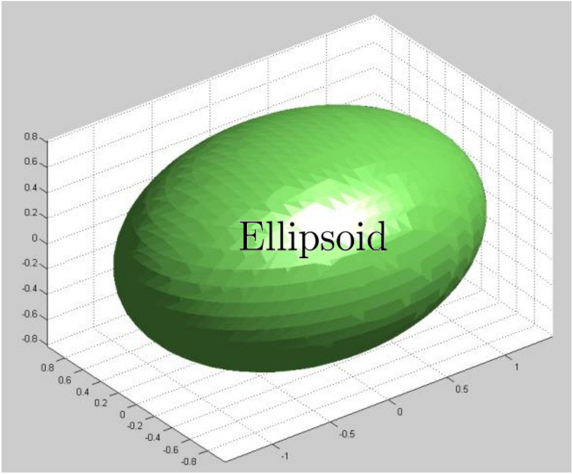


Gemensamt för kartorna är att de alla illustrerar olika funktioner av två variabler

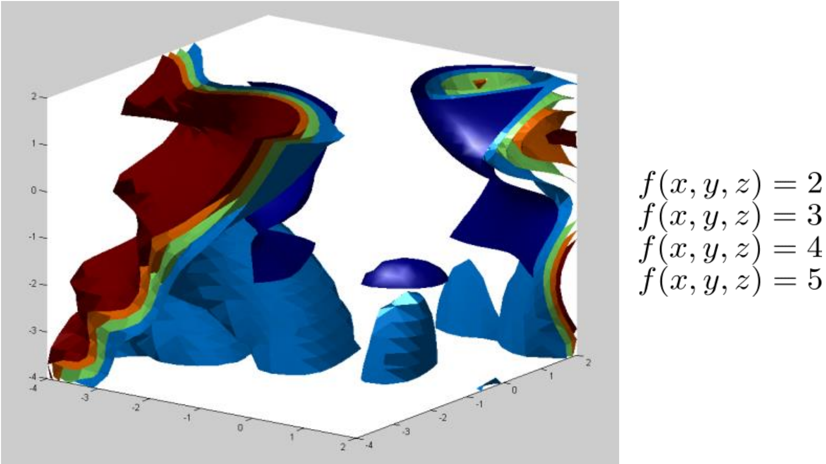
Funktioner $f(x, y, z)$ av tre variabler är svårare att illustrera grafiskt eftersom vi bara har tre rumsdimensioner.

men ibland kan man få en bra bild av sådana funktioner genom att plotta s.k. **nivåytor** dvs. lösningsmängden till ekvationer av typen

$$f(x, y, z) = C$$

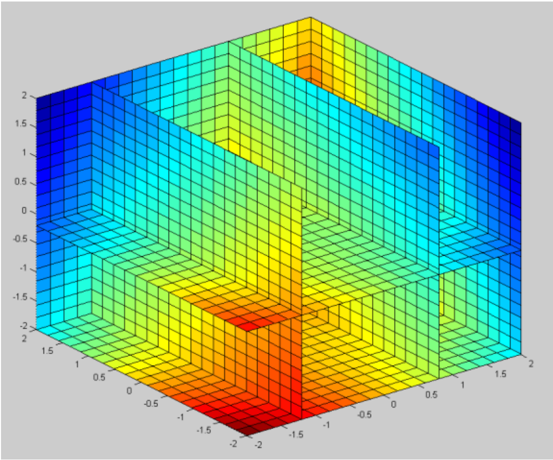


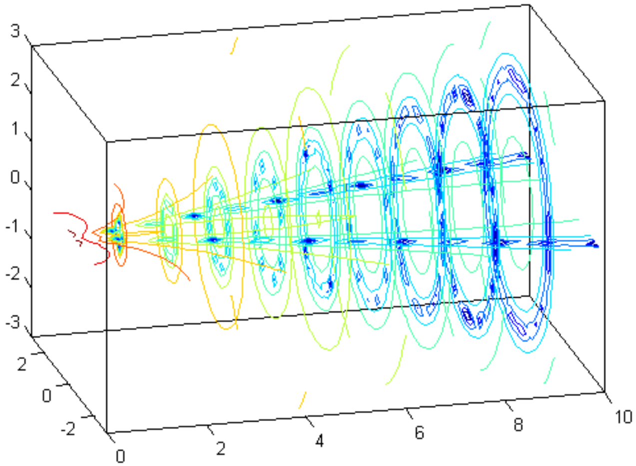
Detta är nivåytan
$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 2$

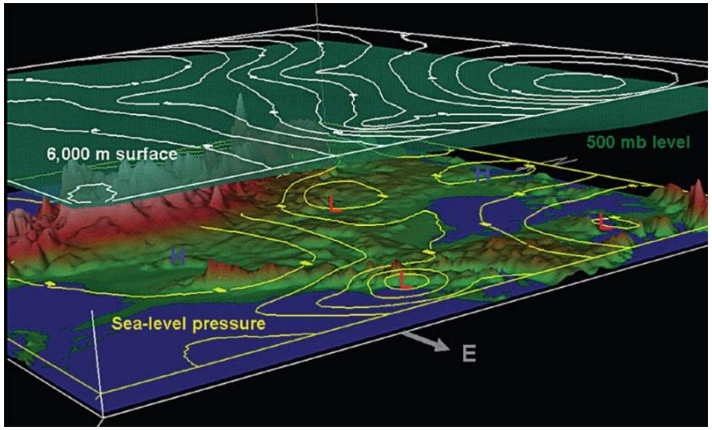


Detta är några nivåytor till funktionen
$f(x, y, z) = (x + z \cos y)(y + \sin xz)$

... eller så kan man använda färg eller nivkurvor för att illustrera funktionsvärdena $f(x, y, z)$ på vissa utvalda ytor t.ex. på plan parallella med koordinatplanen





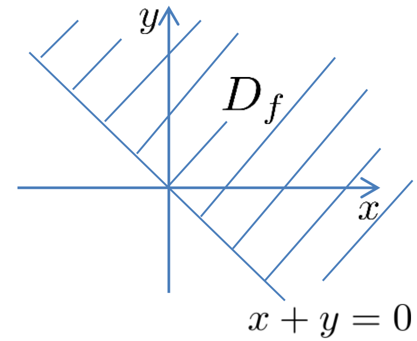


Om definitionsmängden D_f inte anges explicit så är det underförstått att med D_f menas alla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ för vilket $f(x, y)$ existerar (dvs. kan tolkas entydigt) som ett reellt tal.

Exempel 1: Om $f(x, y) = \sqrt{x + y}$ så är

$$D_f : \; x + y \geq 0$$

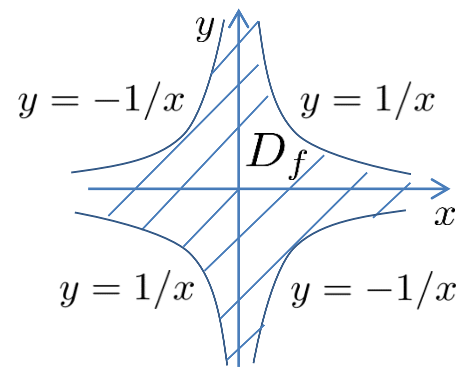
om inget annat anges



Exempel 2: Om $f(x, y) = \arcsin(xy)$ så är

$$D_f : \; -1 \leq xy \leq 1$$

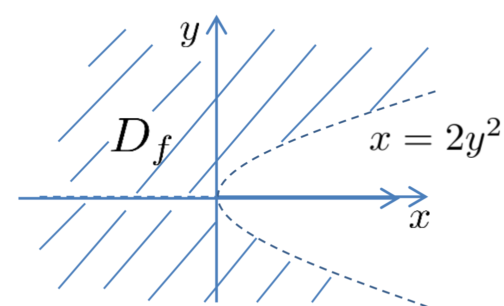
om inget annat anges



Exempel 3: Om $f(x, y) = \ln\left(2 - \frac{x}{y^2}\right)$ så är

$$D_f : \; 2 - \frac{x}{y^2} > 0 \text{ och } y \neq 0$$

om inget annat anges

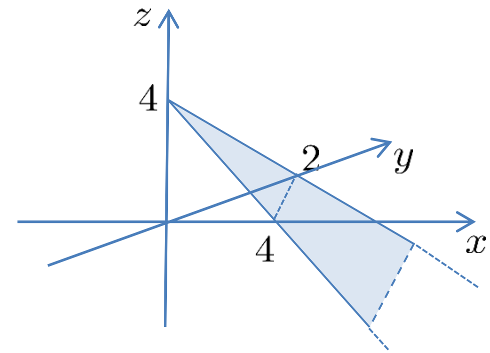


Om det är möjligt/rimligt så kan det ibland vara till stor hjälp att kunna skissa grafer för hand.

Exempel 1: $f(x,y) = 4 - x - 2y$

antag $D_f : x \geq 0, y \geq 0$

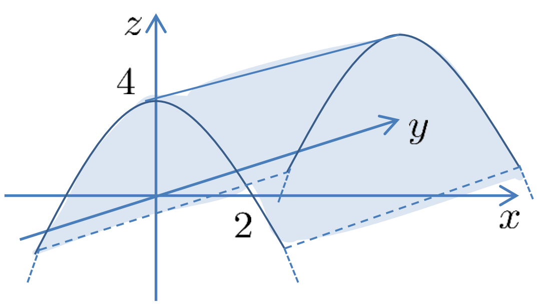
$z = 4 - x - 2y$ är del av ett plan



Exempel 2: $f(x,y) = 4 - x^2$

antag $D_f = \mathbb{R}^2$

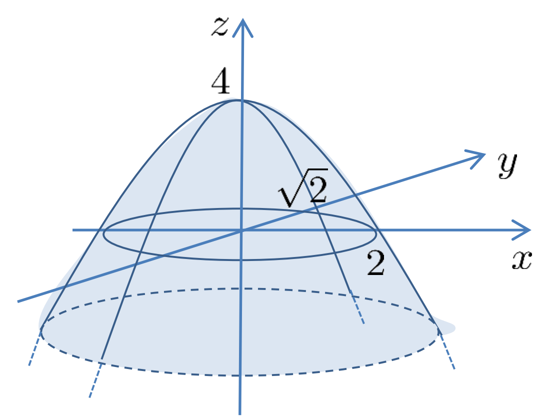
$z = 4 - x^2$ är en parabolisk cylinder



Exempel 3: $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$

antag $D_f = \mathbb{R}^2$

$z = 4 - x^2 - 2y^2$ är en paraboloid

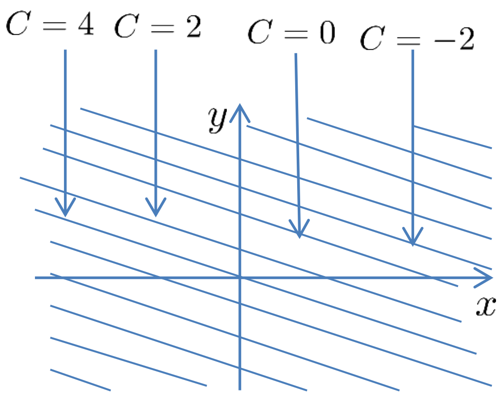


... eller skissa nivåkurvor för hand.

Exempel 1: $f(x,y) = 4 - x - 2y$

antag $D_f : x \geq 0, y \geq 0$

$4 - x - 2y = C$ är linjer

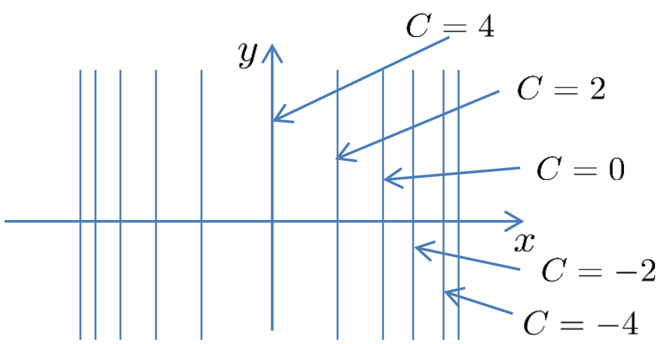


Exempel 2: $f(x,y) = 4 - x^2$

antag $D_f = \mathbb{R}^2$

$4 - x^2 = C \;\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4-C}$

är också linjer

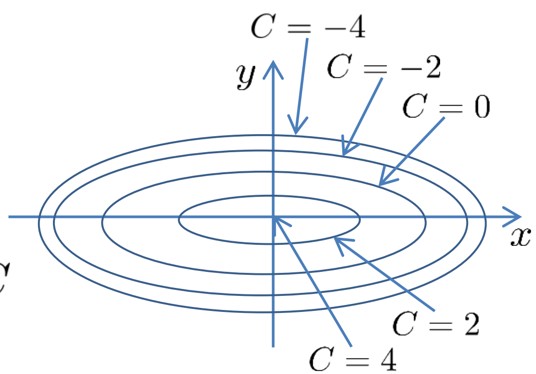


Exempel 3: $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$

antag $D_f = \mathbb{R}^2$

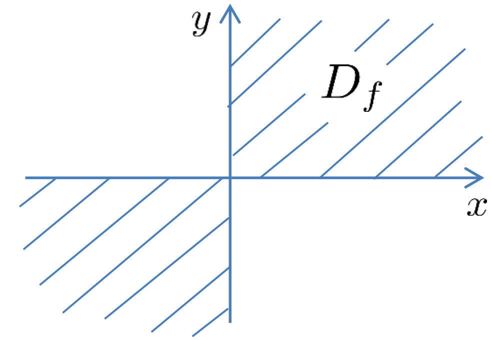
$4 - x^2 - 2y^2 = C \;\Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 4 - C$

är ellipser



... och här är ytterligare några exempel

Exempel 1: Funktionen $f(x,y) = \sqrt{xy}$ är definierad för alla (x,y) sådana att $xy \geq 0$. vilket är uppfyllt om både $x \geq 0$ och $y \geq 0$ eller om både $x \leq 0$ och $y \leq 0$.

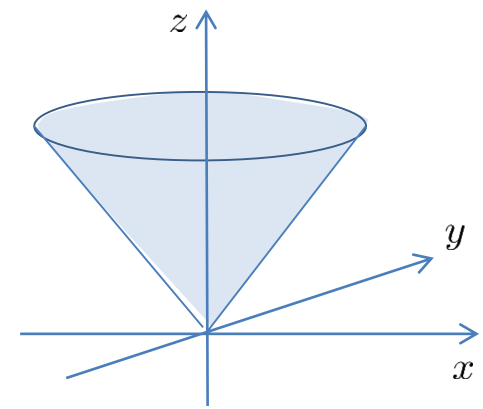


Exempel 2: Här är en skiss av grafen till funktionen $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Notera att $z = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow$

$$x^2 + y^2 = z^2 \ , \ \ z \geq 0$$

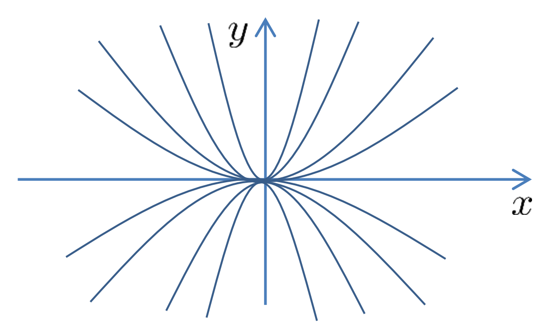
vilket beskriver en cirkulär kon.



Exempel 3: Nivåkurvorna till funktionen $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$ beskrivs av;

$\frac{x^2}{y} = C \quad \Leftrightarrow y = Cx^2$

vilket är parabler genom origo.



Definition: En reellvärd funktion $f(x,y)$ sägs ha **gränsvärdet** L då (x,y) går mot (a,b) om det till varje $\epsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$ sådant att;

$$|f(x,y) - L| < \epsilon \quad \text{då } (x,y) \in D_f \quad \text{och} \quad \underbrace{|(x,y) - (a,b)|}_{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} < \delta$$

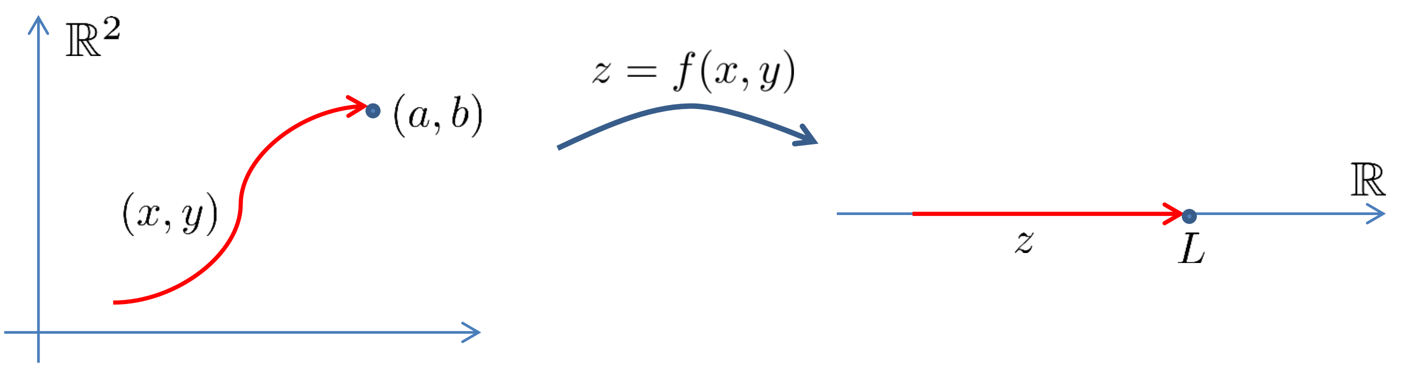
I så fall skriver vi

$$f(x,y) \to L \quad \text{då} \quad (x,y) \to (a,b)$$

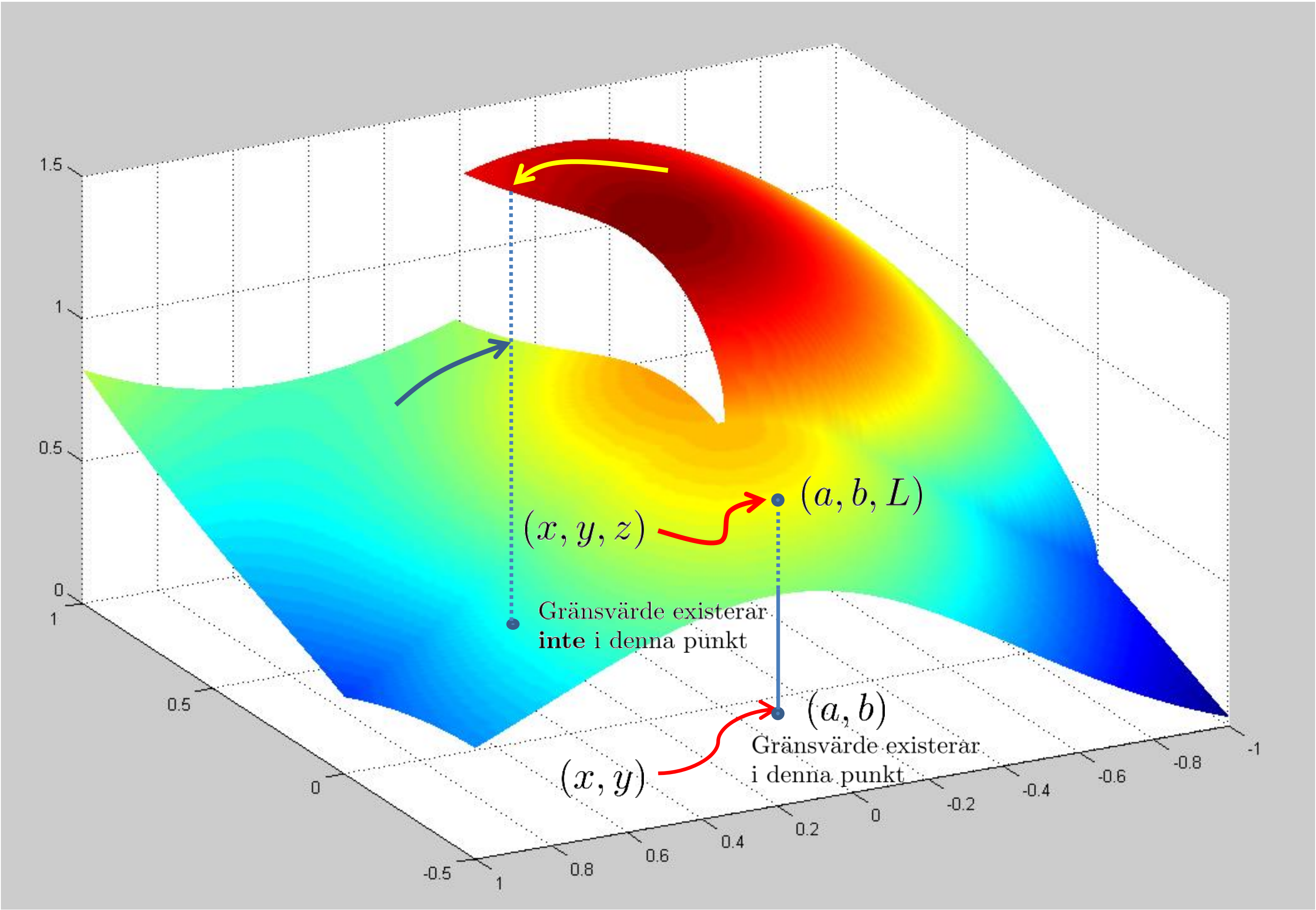
eller

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

Intuitivt:



En annan illustration av gränsvärde

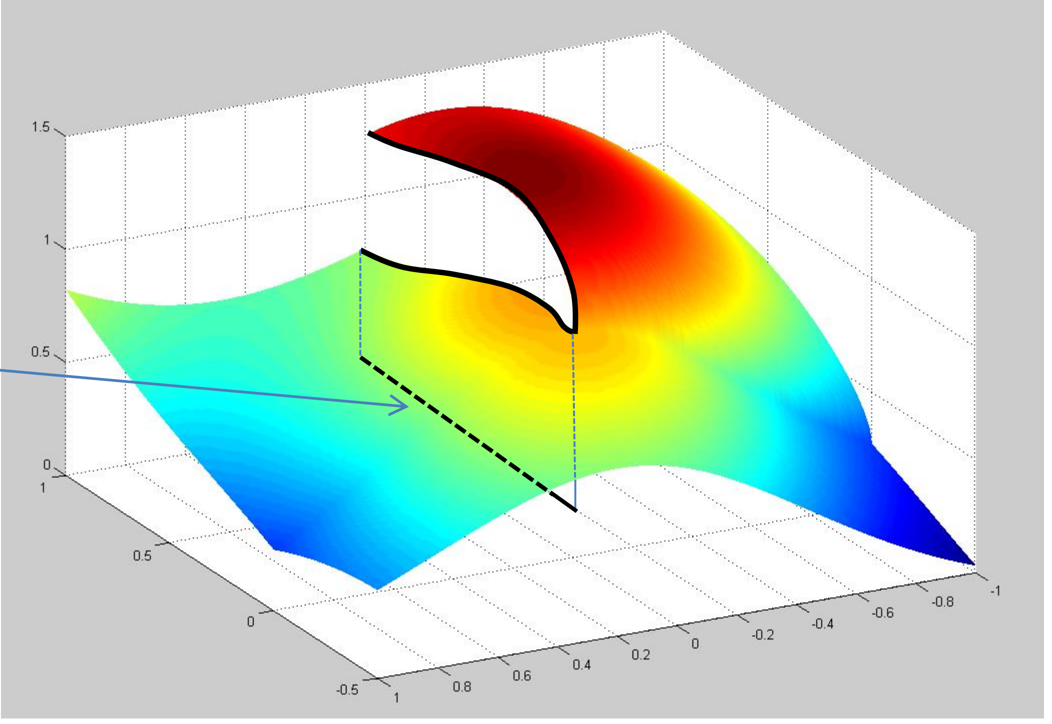


Definition: En reellvärd funktion $f(x, y)$ sägs vara **kontinuerlig** i en punkt $(a, b) \in D_f$ om

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Om $f(x, y)$ är kontinuerlig i varje punkt i D_f så säger vi att $f(x, y)$ är en kontinuerlig funktion

$f(x, y)$ är kontinuerlig överallt utom längs denna linje



I avsnitt 12.2 i Adams finns ett antal elementära gränsvärdesregler listade t.ex. att

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y) + g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

om båda gränsvärdena i högerledet existerar.

... men precis som för funktioner av en variabel så kan det vara svårt att avgöra om ett gränsvärde existerar t.ex. för ett gränsvärde av typen

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

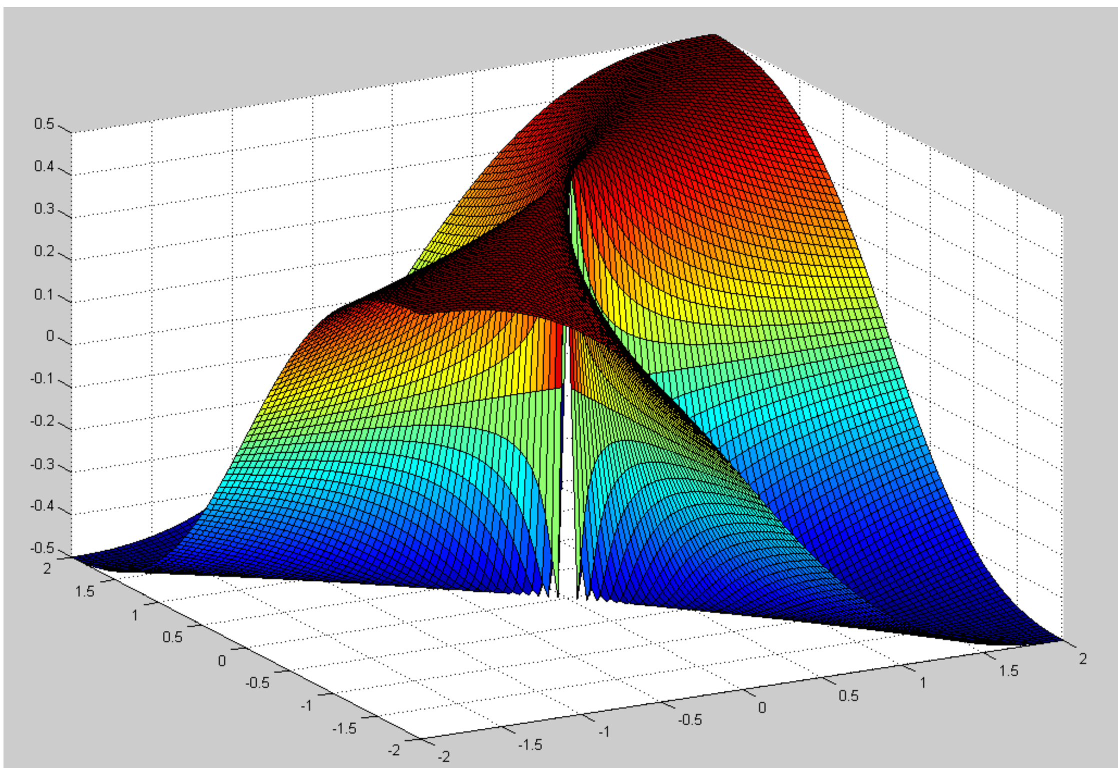
då $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$ och $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = 0$

T.ex. saknar funktionen $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$

ty;

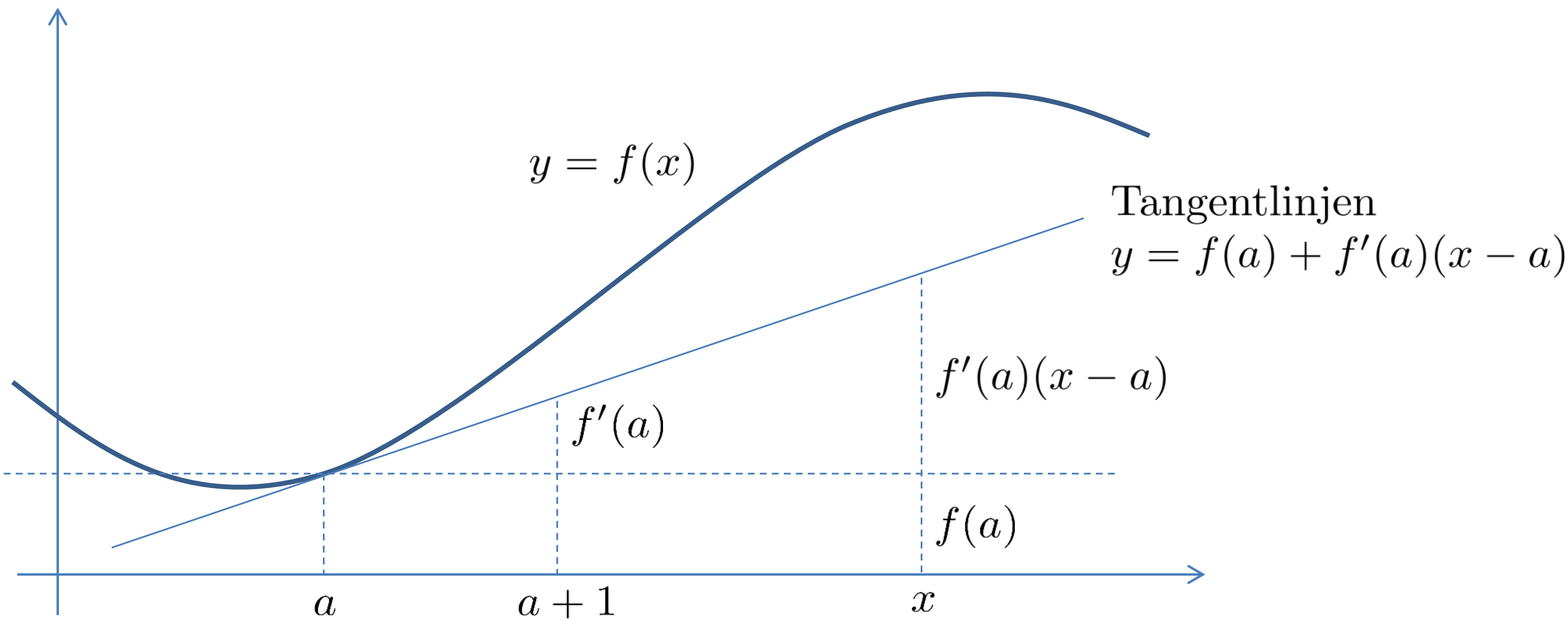
$$f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \quad , \quad \text{då } x \to 0$$

$$f(x,-x) = \frac{-x^2}{x^2+x^2} = -\frac{1}{2} \to -\frac{1}{2} \quad , \quad \text{då } x \to 0$$



För reellvärda funktioner av en variabel $f(x)$ definieras derivata genom;

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



För reellvärda funktioner av två variabler $f(x, y)$ kan vi t.ex. mäta lutningen i x-led och y-led genom de s.k. **partiella derivatorna**;

$$f_1'(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

$$f_2'(a, b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}$$

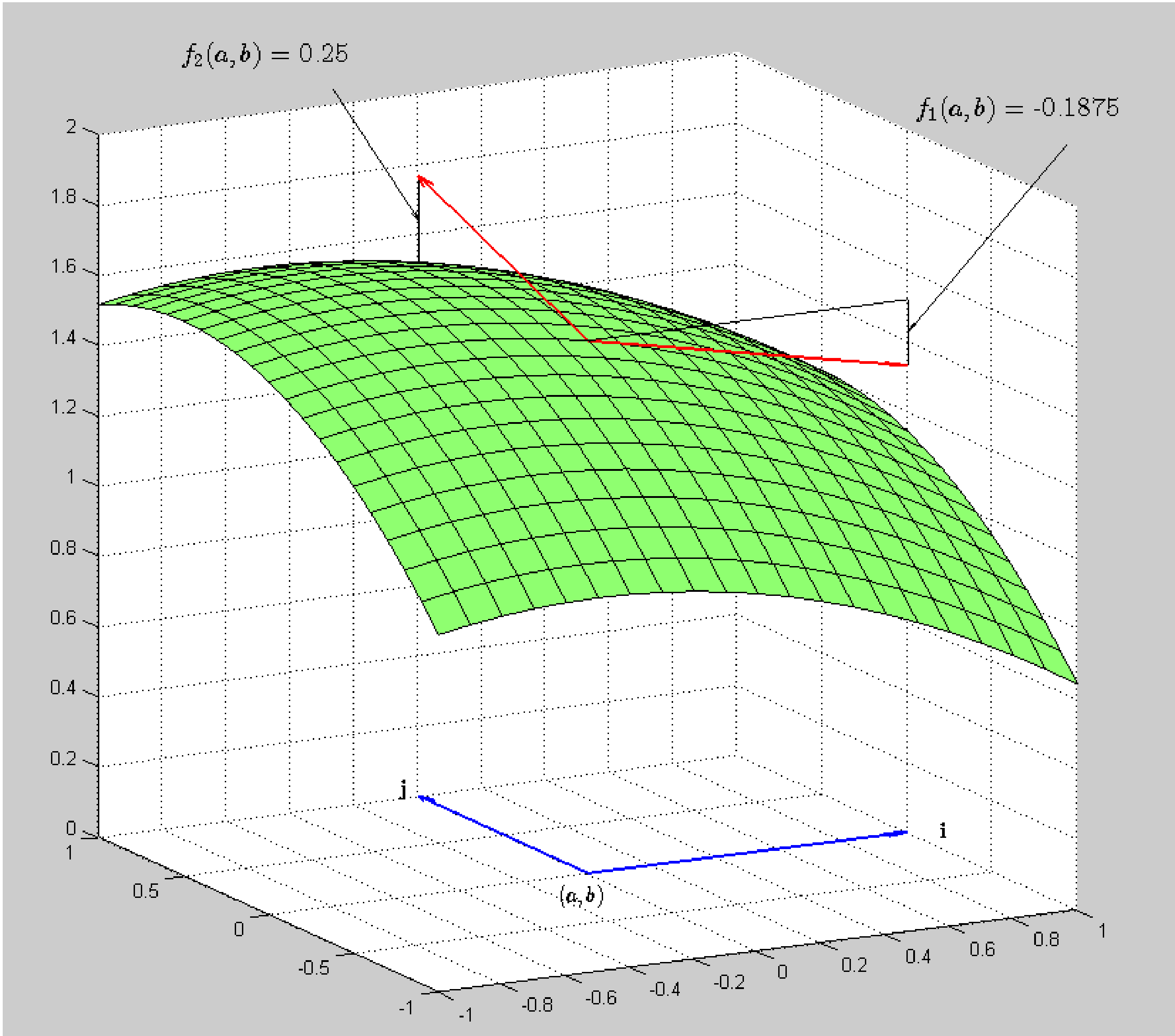
Det finns även andra beteckningar för partiell derivata;

$$f_1'(a, b) = f_1(a, b) = D_1 f(a, b) = f_x'(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

Dessa två beteckningar använder Adams

Vi säger att $f(x, y)$ är **partiellt deriverbar** i (a, b) om både $f_1'(a, b)$ och $f_2'(a, b)$ existerar.

Illustration av partiell derivata



Räknetekniskt skall y uppfattas som konstant när man deriverar m.a.p. x och vice versa. Här är några exempel;

Exempel 1: Om $f(x,y) = x^2y + 2y^2$ så är

$$f_1'(x,y) = 2xy$$

$$f_2'(x,y) = x^2 + 4y$$

Exempel 2: Om $f(x,y) = \sin(xy^2)$ så är

$$f_1'(x,y) = \cos(xy^2) \cdot y^2$$

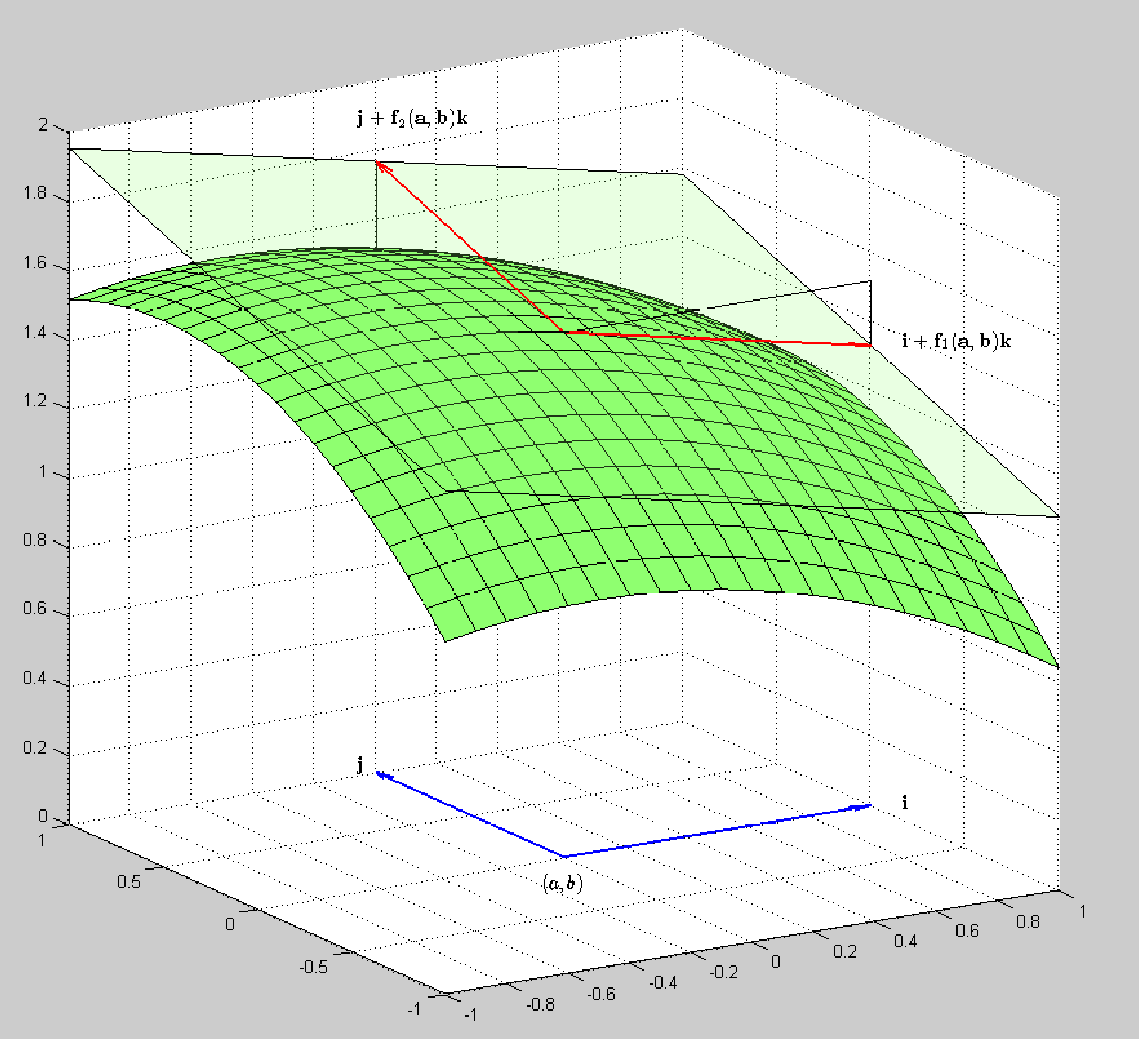
$$f_2'(x,y) = \cos(xy^2) \cdot 2xy$$

Exempel 3: Om $f(x,y) = y \cdot g(x^2 + y)$,
där $g(t)$ är någon deriverbar funktion av en variabel, så är

$$f_1'(x,y) = 2xy \cdot g'(x^2 + y)$$

$$f_2'(x,y) = g(x^2 + y) + y \cdot g'(x^2 + y)$$

Tangentvektorerna spänner upp ett **tangentplan**



En normalvektor till tangentplanet får vi om vi tar vektorprodukten av de två tangentvektorerna;

$$\mathbf{N} = (\mathbf{i} + f_1'(a,b))\mathbf{k}) \times (\mathbf{j} + f_2'(a,b)\mathbf{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_1'(a,b) \\ 0 & 1 & f_2'(a,b) \end{vmatrix} = -f_1'(a,b)\mathbf{i} - f_2'(a,b)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Om (x, y, z) är en punkt i tangentplanet genom $(a, b, f(a,b))$ så är $\mathbf{v} = (x-a, y-b, z-f(a,b))$ en vektor i planet varpå det följer att;

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$-f_1'(a,b)(x-a) - f_2'(a,b)(y-b) + (z - f(a,b)) = 0$$

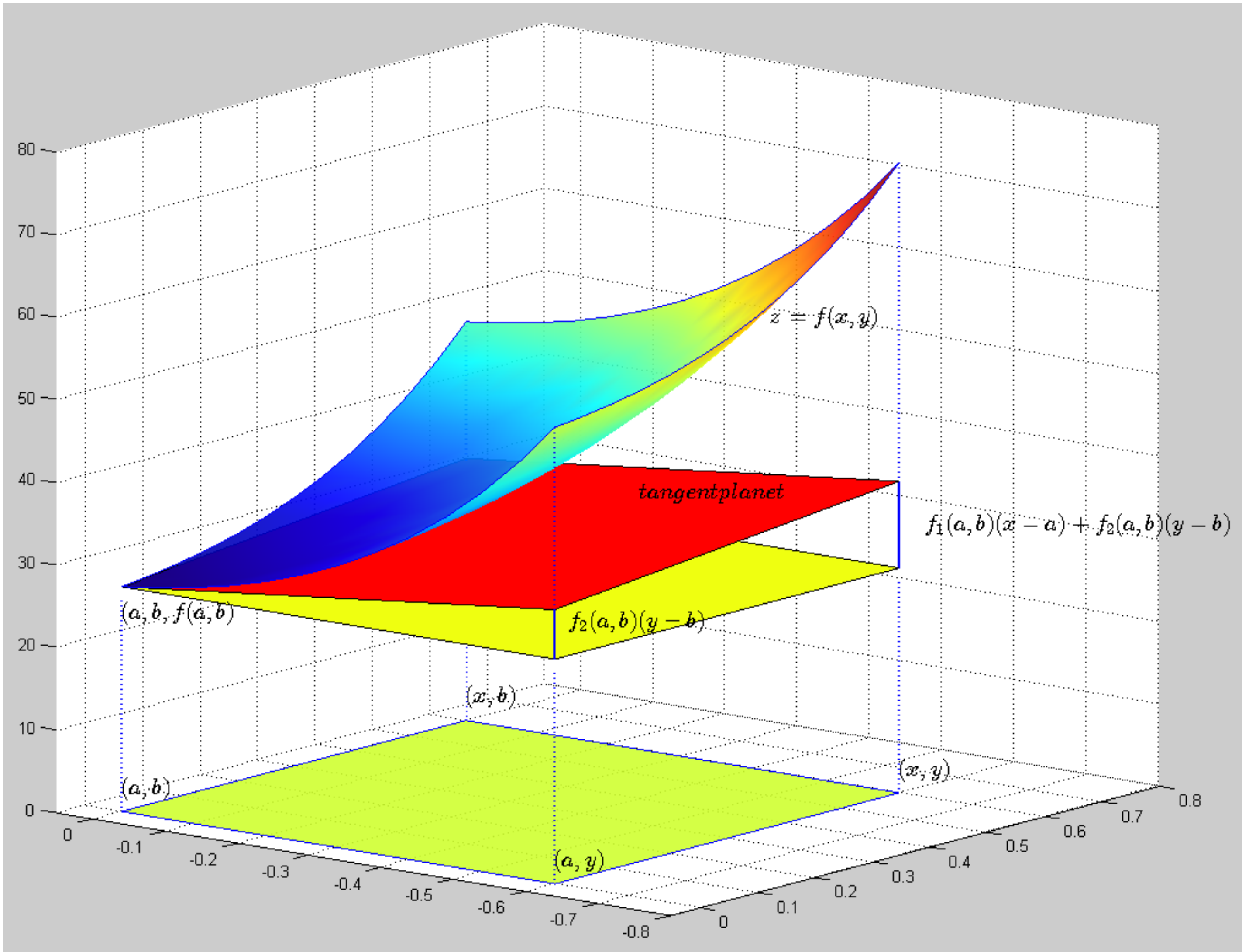
$$\Longleftrightarrow$$

$$\boxed{z = f(a,b) + f_1'(a,b)(x-a) + f_2'(a,b)(y-b)}$$

(Ekvation som beskriver **tangentplanet**)

Geometrisk tolkning av tangentplanets ekvation

$$z = f(a,b) + f_1'(a,b)(x-a) + f_2'(a,b)(y-b)$$



Eftersom $\mathbf{N} = -f_1'(a,b)\mathbf{i} - f_2'(a,b)\mathbf{j} + \mathbf{k}$ är en normalvektor till funktionsytan $z = f(x,y)$ i punkten $(a, b, f(a,b))$ så kan normallinjen beskrivas med;

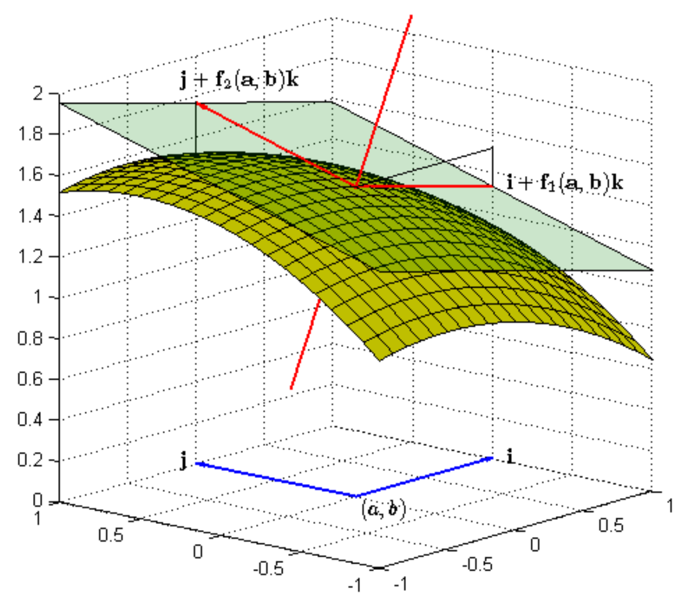
$$\begin{cases} x = a - f_1'(a,b)t \\ y = b - f_2'(a,b)t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = f(a,b) + t \end{cases}$$

(Normallinjen på parameterform)

eller ekvivalent med följande ekvationer;

$$\boxed{\frac{x-a}{f_1'(a,b)} = \frac{y-b}{f_2'(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}}$$

(Normallinjen på parameterfri form)



Exempel: Antag att vi vill bestämma tangentplanet och normallinjen till ytan $z = x^2y + 2y^2$ genom punkten $(1, 2, 10)$.

Sätt $f(x, y) = x^2y + 2y^2$ och notera att $f(1, 2) = 10$ så punkten $(1, 2, 10)$ ligger mycket riktigt på ytan. Vidare har vi;

$$\begin{cases} f_1'(x,y) = 2xy \\ f_2'(x,y) = x^2 + 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1'(1,2) = 4 \\ f_2'(1,2) = 9 \end{cases}$$

så $\mathbf{N} = -f'(1,2)\mathbf{i} - f_2'(1,2)\mathbf{j} + \mathbf{k} = -4\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + \mathbf{k}$ är en normalvektor till ytan $z = f(x, y)$ genom punkten $(1, 2, 10)$.

Tangentplanet beskrivs av ekvationen;

$$z = 10 + 4(x-1) + 9(y-2) \quad \Leftrightarrow \quad z = 4x + 9y - 12$$

och normallinjen beskrivs av ekvationerna;

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{9} = \frac{z-10}{-1}$$

Kedjeregeln i en variabel säger att;

$$\frac{d}{dt}\left(f(x(t)\right) = f'(x(t)) \cdot x'(t)$$

Det finns motsvarande deriveringsregel för funktioner av flera variabler. Man kan t.ex. visa att;

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(f(x(t), y(t))\right) = f_1'(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_2'(x(t), y(t)) \cdot y'(t)}$$

vilket t.ex. också medför att;

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(f(x(u,v), y(u,v))\right) =$$

$$= f_1'(x(u,v), y(u,v)) \cdot x_1'(u,v) + f_2'(x(u,v), y(u,v)) \cdot y_1'(u,v)$$

De två varianterna av kedjeregeln som markerats på föregående sida kan kortare skrivas (och gör dem lättare att komma ihåg);

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Här är några exempel på derivering m.h.a. kedjeregeln i flera variabler;

Exempel 1: $\frac{d}{\partial t}\left(f(t^2, 3t+2)\right) = f_1'(t^2, 3t+2)2t + f_2'(t^2, 3t+2)3$

eller kortare $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}2t + \dfrac{\partial f}{\partial y}3$, där $x = t^2$ och $y = 3t+2$

Exempel 2: $\frac{\partial}{\partial u}\left(f(u^2v, \frac{u}{v})\right) = f_1'(u^2v, \frac{u}{v})2uv + f_2'(u^2v, \frac{u}{v})\frac{1}{v}$

$\frac{\partial}{\partial v}\left(f(u^2v, \frac{u}{v})\right) = f_1'(u^2v, \frac{u}{v})u^2 + f_2'(u^2v, \frac{u}{v})(\frac{-u}{v^2})$

De partiella derivatorna är funktioner i sig och kan i sin tur deriveras partiellt. För funktioner $f(x, y)$ av två variabler finns fyra **andraderivator**;

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{, vilket kortare betecknas } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ eller } f''_{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{, vilket kortare betecknas } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ eller } f''_{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{, vilket kortare betecknas } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ eller } f''_{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{, vilket kortare betecknas } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ eller } f''_{22}$$

Man kan visa att ordningen i vilket man deriverar inte har betydelse, bara man deriverar m.a.p. samma variabler lika många gånger, så t.ex. är;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{dvs.} \quad f''_{12} = f''_{21}$$

Exempel 1: Om $f(x,y) = \sin(xy^2)$ så såg vi tidigare att;

$$f_1'(x,y) = y^2 \cos(xy^2)$$

$$f_2'(x,y) = 2xy \cos(xy^2)$$

så andraderivatorna blir;

$$f_{11}''(x,y) = -y^4 \sin(xy^2)$$

$$f_{12}''(x,y) = 2y \cos(xy^2) - 2xy^3 \sin(xy^2)$$

$$f_{21}''(x,y) = 2y \cos(xy^2) - 2xy^3 \sin(xy^2)$$

$$f_{22}''(x,y) = 2x \cos(xy^2) - 4x^2y^2 \sin(xy^2)$$

Notera speciellt att andraderivatorna $f_{12}''(x,y)$ och $f_{21}''(x,y)$ är lika.

Kedjeregeln kan även användas för omskrivning av andraderivator.
Här är ett exempel där även produktregeln måste användas.

Exempel:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x^2+y^2,xy)\right) = f_1'(x^2+y^2,xy)2x + f_2'(x^2+y^2,xy)y$$

Här måste produktregeln användas.

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(f(x^2+y^2,xy)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x^2+y^2,xy)\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(f_1'(x^2+y^2,xy)2x + \boxed{f_2'(x^2+y^2,xy)}y\right) =$$

$$= \left(f_{11}''(x^2+y^2,xy)2y + f_{12}'(x^2+y^2,xy)x\right)2x+$$

$$+\left(f_{21}''(x^2+y^2,xy)2y + f_{22}''(x^2+y^2,xy)x\right)\right) y + f_2'(x^2+y^2,xy)$$

$$= 4xyf_{11}''(x^2+y^2,xy)2y + 2(x^2+y^2)f_{12}'(x^2+y^2,xy)+$$

$$+xyf_{22}''(x^2+y^2,xy) + f_2'(x^2+y^2,xy)$$

En differentialekvation, där den obekante är en funktion av flera variabler, kallas för en **partiell differentialekvation**

En viktig partiell differentialekvation som dyker upp i många modeller av verkligheten och har stor teoretisk betydelse är **Laplace ekvation**;

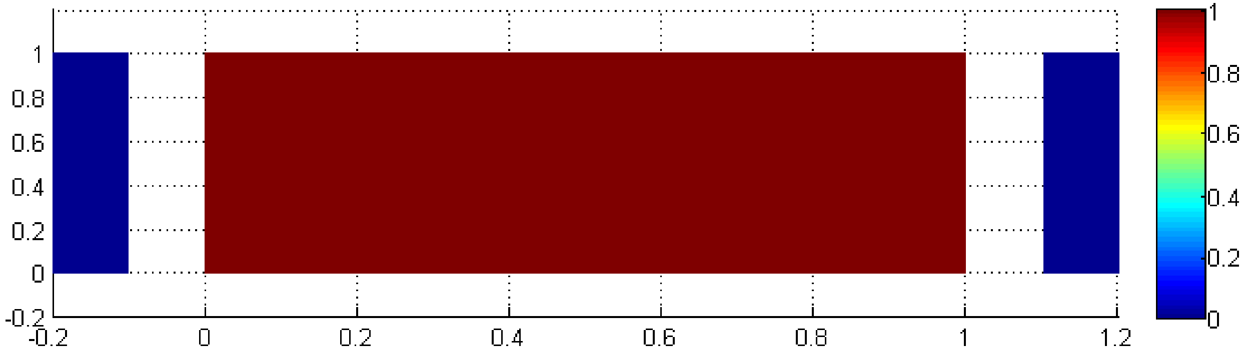
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Många viktiga fysikaliska förlopp kan beskrivas m.h.a. differentialekvationer ...

Värmeledning

$$\frac{\partial T}{\partial t} - k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

konstant som beror på materialets värmeledningsförmåga



$k = 1$

$T(0,t) = 0$

$T(L,t) = 0$

$T(x,0) = 1$

Svängande sträng

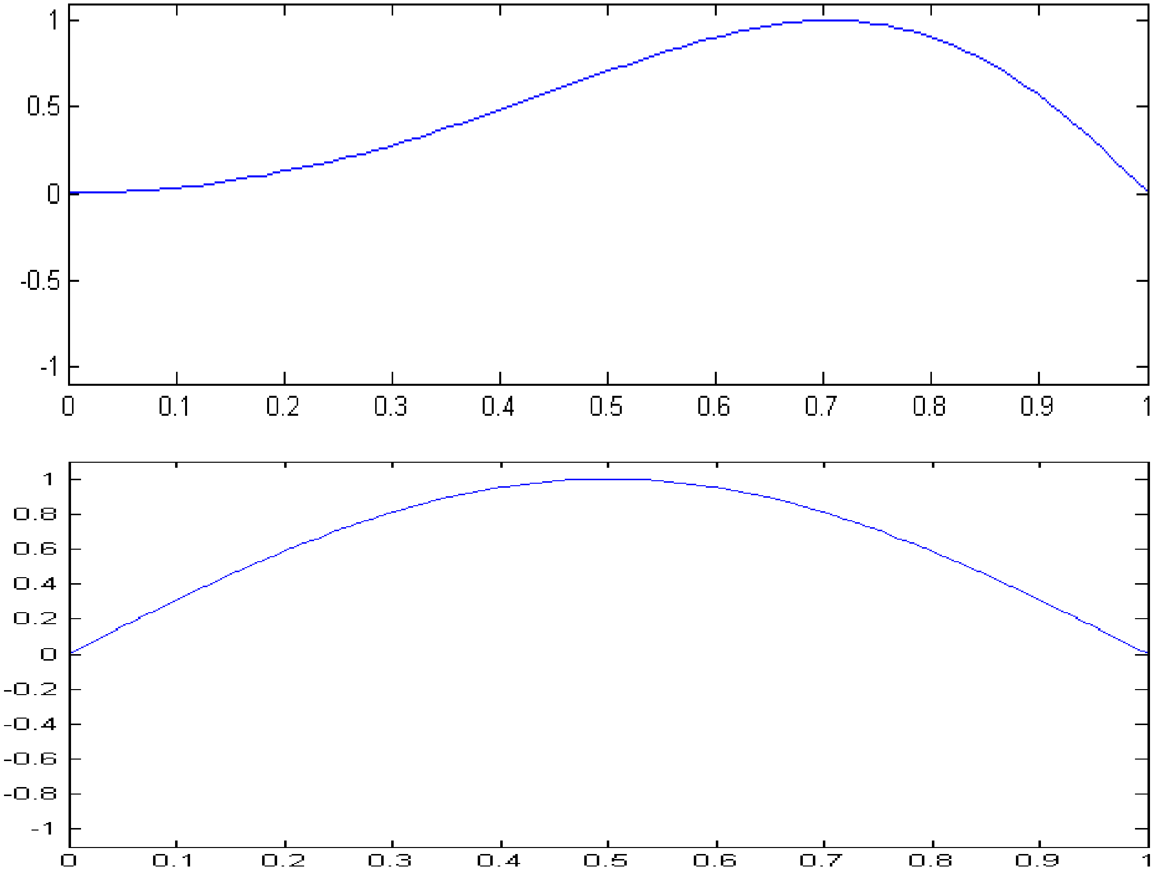
spännkraften

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{K}{m}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

massa per längdenhet

$i = 1$

$i = 2$



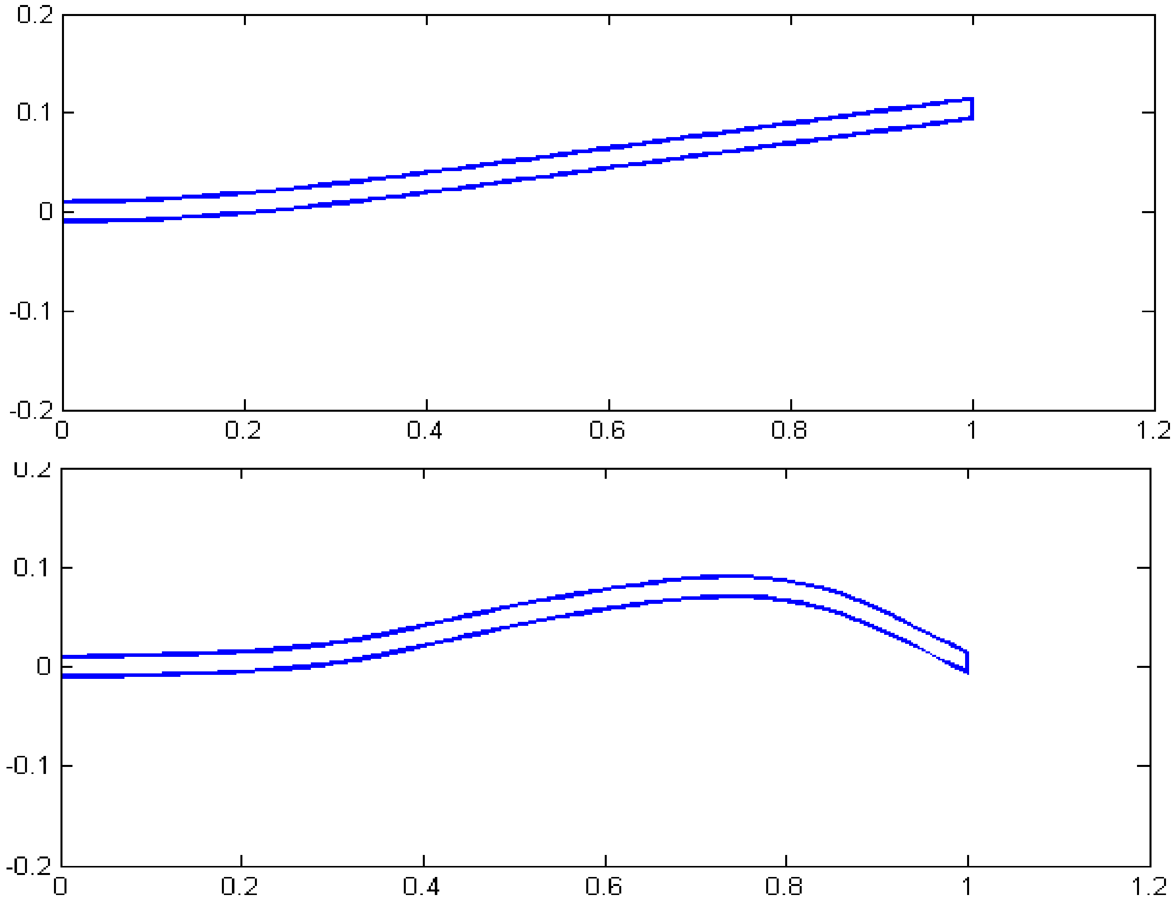
$$K = 1$$
$$m = 0.5$$
$$L = 1$$

$$y(0,t) = 0$$
$$y(L,t) = 0$$
$$y(x,0) = f_i(x)$$
$$y'_t(x,0) = 0$$

Böjsvängande balk

$$\underbrace{EI}_{\text{böjstyvheten}}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

massa per längdenhet



$i = 1$

$i = 2$

$$EI = 1$$
$$m = 0.5$$
$$L = 1$$

$$y(0,t) = 0$$
$$y'_x(0,t) = 0$$
$$y''_{xx}(L,t) = 0$$
$$y'''_{xxx}(L,t) = 0$$
$$y(x,0) = f_i(x)$$
$$y'_t(x,0) = 0$$

Begreppen gränsvärde, kontinuitet och derivata kan definieras på liknande vis även för funktioner av tre eller fler variabler

Även beteckningar och räkneregler har analog form.
Här är några exempel;

Exempel 1: Om $f(x, y, z) = x^2yz^2 + 2y^2z^3 + xz$ så är

$$f_1'(x, y, z) = 2xyz^2 + z$$

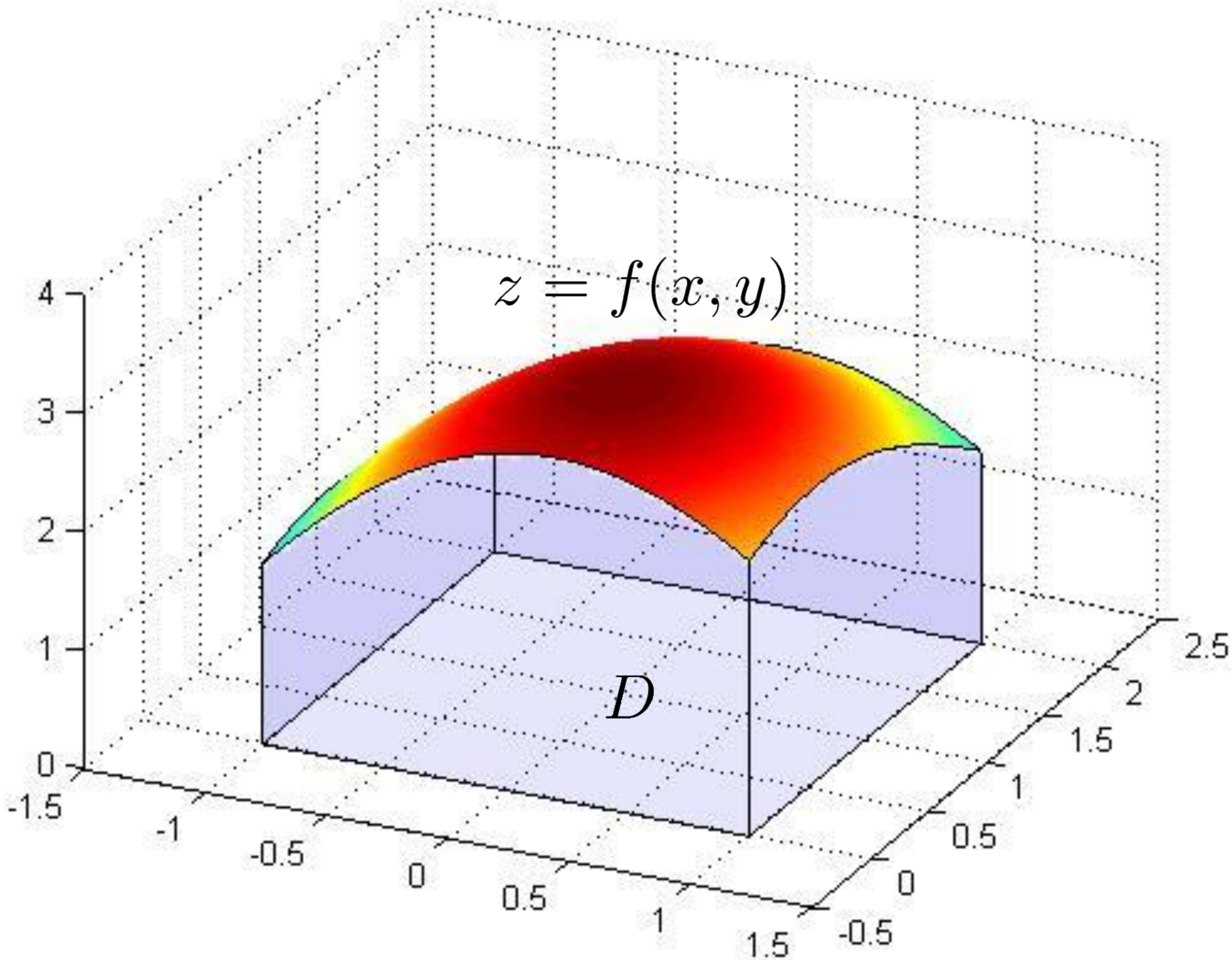
$$f_2'(x, y, z) = x^2z^2 + 4yz^3$$

$$f_3'(x, y, z) = 2x^2yz + 6y^2z^2 + x$$

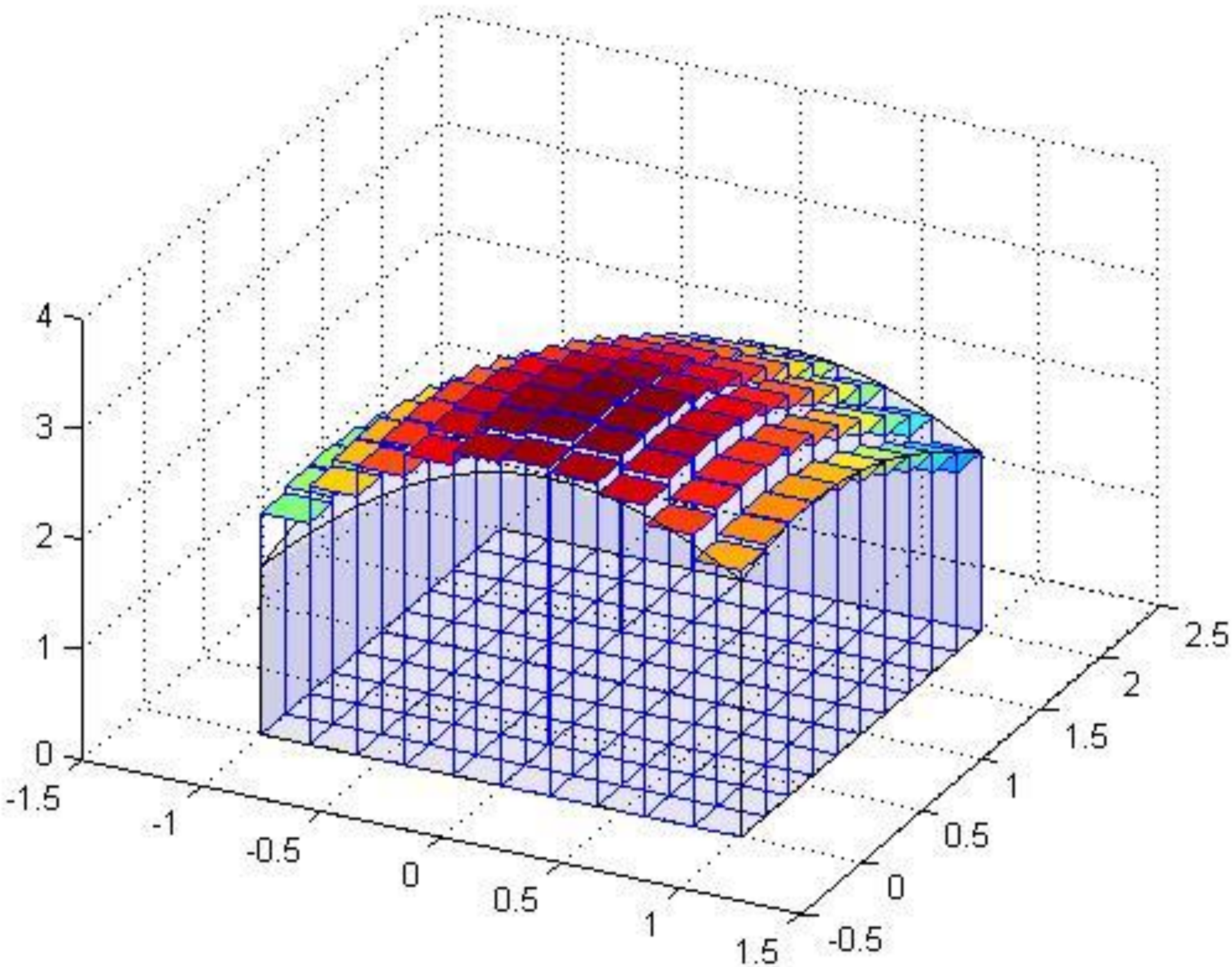
Exempel 2:
$$\frac{\partial}{\partial u}\left(f(u^2v, \frac{u}{v}, 2u + 3v)\right) =$$

$$= f_1'(u^2v, \frac{u}{v}, 2u + 3v)2uv + f_2'(u^2v, \frac{u}{v}, 2u + 3v)\frac{1}{v} + f_3'(u^2v, \frac{u}{v}, 2u + 3v)2$$

Dubbelintegraler



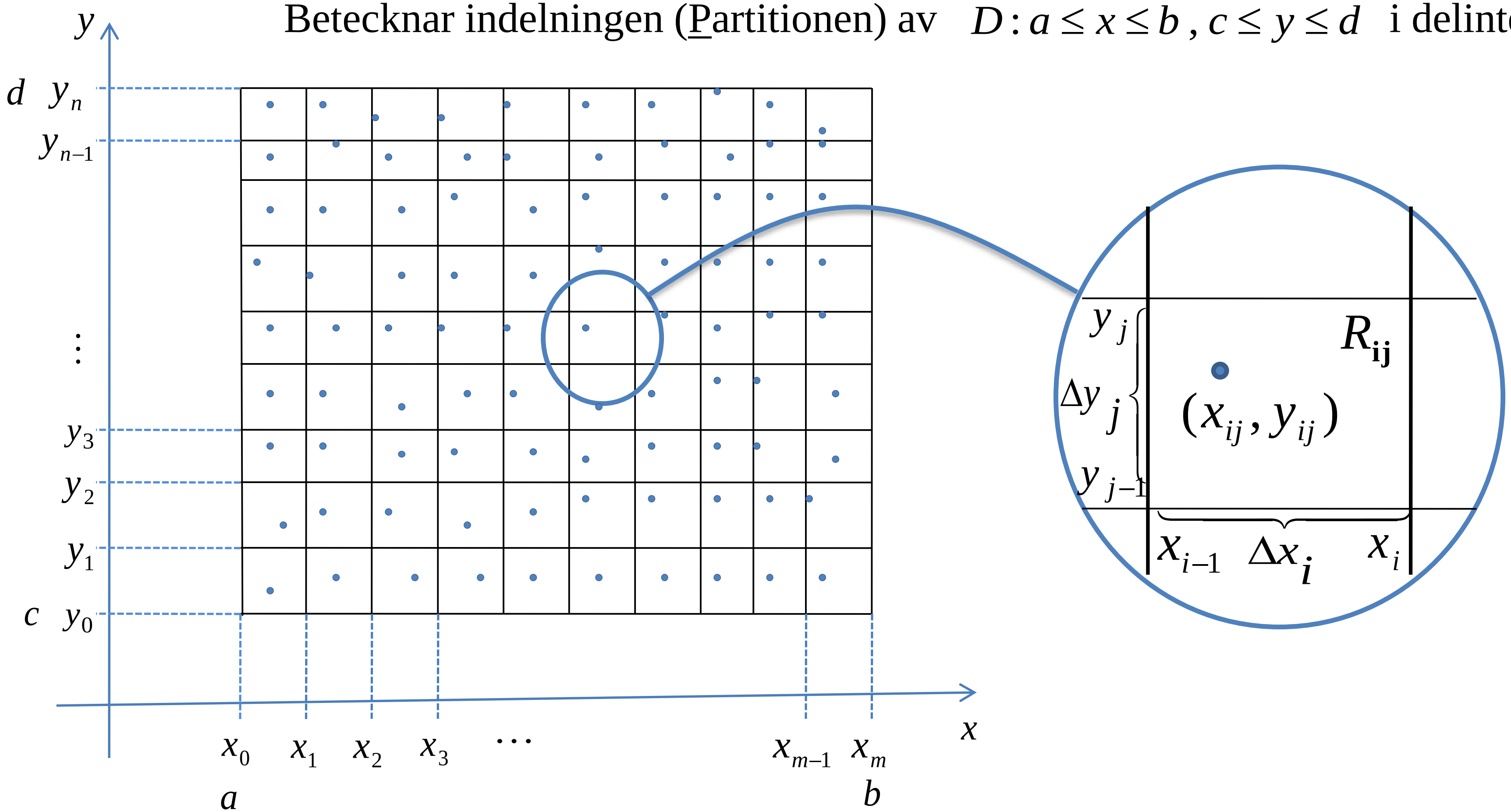
$z = f(x, y)$
D
4
3
2
1
0
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5


4
3
2
1
0
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5

$$R(f,P)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overbrace{\underbrace{f(x_{ij},y_{ij})}_{\textit{Höjden}}\underbrace{\Delta x_i\Delta y_j}_{\textit{Arean av } R_{ij}}}^{\textit{Volymen av rätblocket över } R_{ij}}$$

(Riemann summa)

Betecknar indelningen (<u>P</u>artitionen) av $D: a \le x \le b\,,\, c \le y \le d$ i delintervall



Definition: Vi säger att $f(x,y)$ är integrerbar över rektangeln D och att dubbelintegralen

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \quad \text{har värdet } I \text{ om}$$

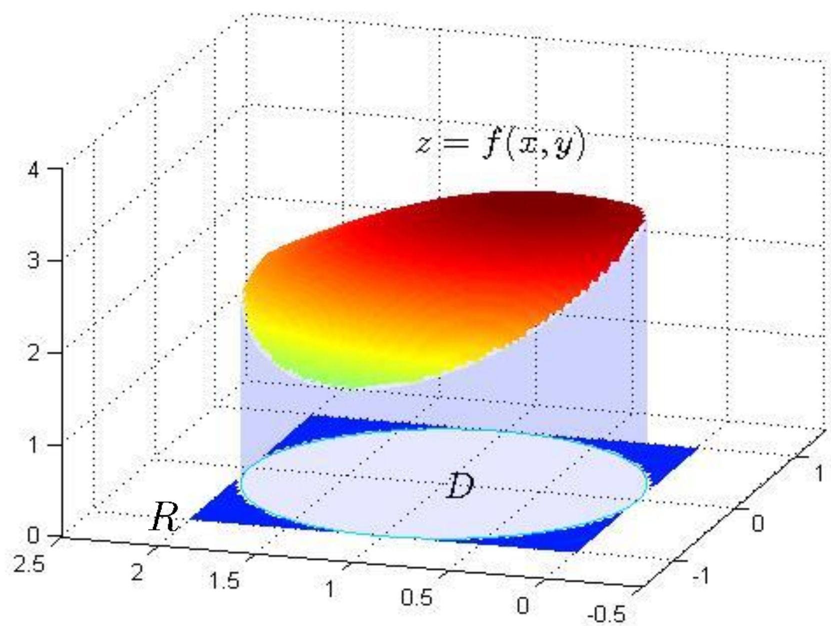
$$R(f,P) \to I \quad \text{då } \underbrace{\max_{i,j}\left(diam(R_{ij})\right)}_{\text{indelningens finhet}} \to 0$$

Om integrationsområdet D inte är rektangulärt så sätter vi

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_R \hat{f}(x,y)\,dxdy$$

där R är ett rektangulärt område som innehåller D och

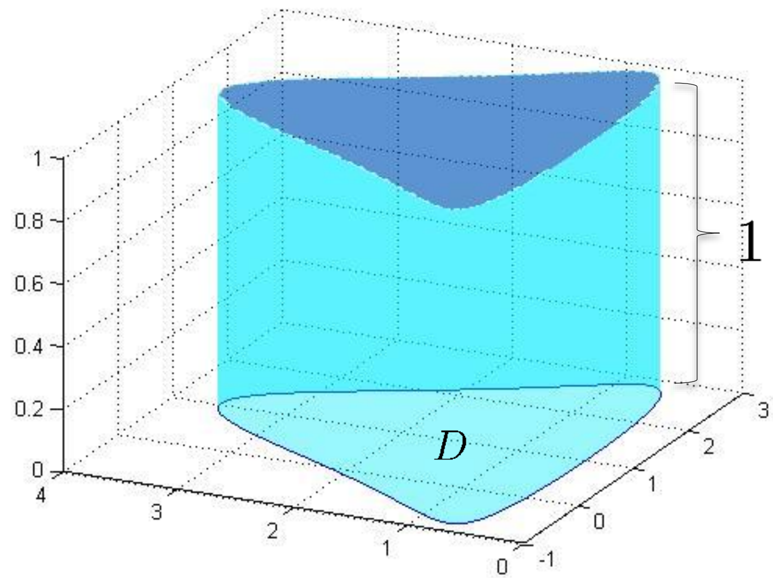
$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ,\text{ då } \quad (x,y) \in D \\ 0 & ,\text{ då } \quad (x,y) \notin D \end{cases}$$



Några egenskaper

- Om $f(x,y) \geq 0$ på D så ger integralen $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ volymen av det område i rummet som ligger vertikalt ovanför D och begränsas uppåt av ytan $z = f(x,y)$.

- $\iint_D dxdy =$ arean av D



Fler egenskaper

- Dubbelintegralen är linjär

$$\iint_D (Af(x,y) + Bg(x,y))\,dxdy = A\iint_D f(x,y)\,dxdy + B\iint_D g(x,y)\,dxdy$$

- Om D är en union av disjunkta delmängder $D_1, D_2, D_3, ..., D_k$

så är $$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \sum_{j=1}^{k} \iint_{D_j} f(x,y)\,dxdy$$

... och ytterligare några egenskaper

- Om $f(x,y) \leq g(x,y)$ på D så är

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \leq \iint_D g(x,y)\,dxdy$$

- (Triangelolikheten)

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dxdy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dxdy$$

Exempel: Betrakta dubbelintegralen $\iint_D \left(3+\sin\left(x^2 y\right)\right)\,dxdy$,

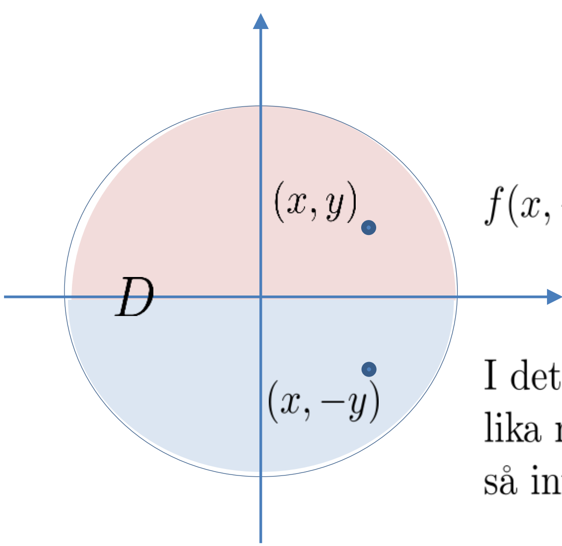
där D är cirkelskivan $x^2+y^2 \leq 4$.

Linjäritetsegenskaperna ger att;

$$\iint_D \left(3+\sin\left(x^2 y\right)\right)\,dxdy = 3\underbrace{\iint_D dxdy}_{=4\pi} + \underbrace{\iint_D \sin\left(x^2 y\right) dxdy}_{=0} = 12\pi$$

ty arean av cirkelskiva med radie 2

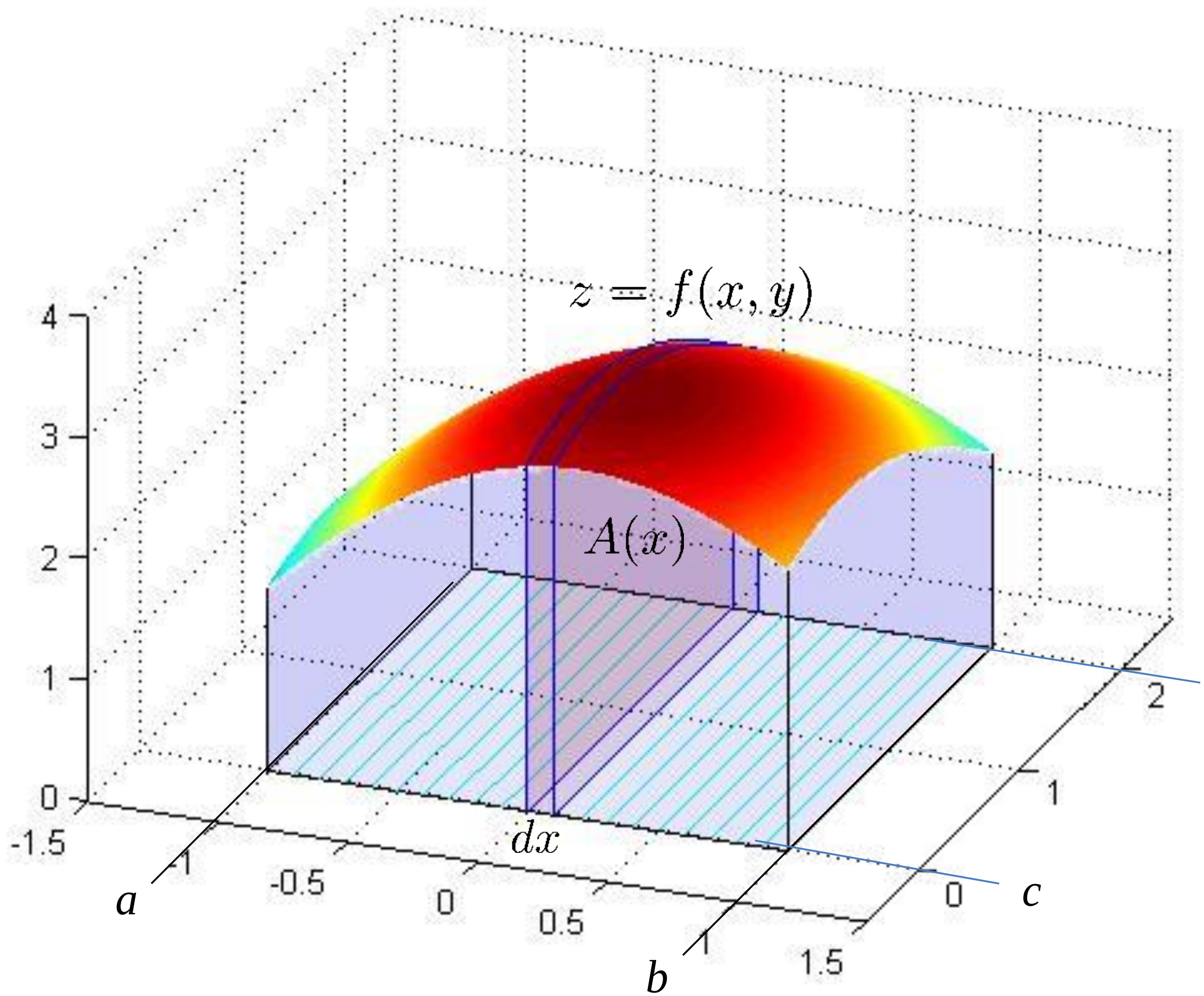
ty $\sin(xy)$ är udda i y och området D är symmetriskt kring x-axeln.



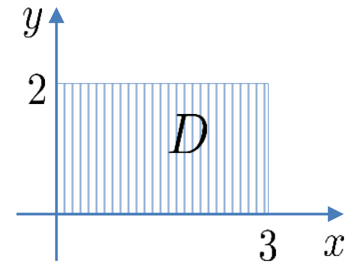
$f(x,-y) = -f(x,y)$

I det röda området är funktionen $f(x,y) = \sin\left(x^2 y\right)$ lika mycket positiv som den är negativ i i det blå området så integralerna över de två delarna tar ut varandra.

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right)\,dx$$



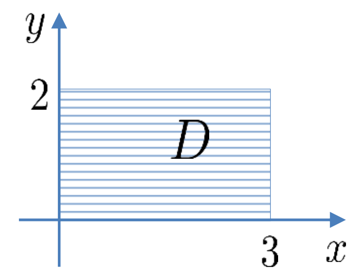
Exempel: Betrakta dubbelintegralen $\iint_D \left(30 - x^2 - 3y^2\right)\, dxdy$, där D är rektangeln $0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2$.



Om vi för varje fixt x mellan 0 och 3 integrerar i y-led från 0 till 2 så får vi;

$$\iint_D \left(30 - x^2 - 3y^2\right)\, dxdy = \int_0^3 \left(\int_0^2 \left(30 - x^2 - 3y^2\right)\, dy\right) dx =$$

$$= \int_0^3 \left(\left[30y - x^2y - y^3\right]_0^2\right) dx = \int_0^3 \left(52 - 2x^2\right)\, dx = \left[52x - \frac{2}{3}x^3\right]_0^3 = 138$$



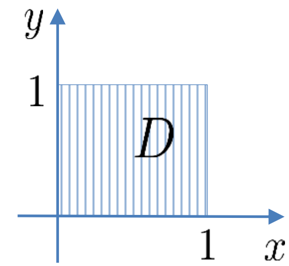
Alternativt kan vi för varje fixt y mellan 0 och 2 integrera i x-led från 0 till 3 och får då istället;

$$\iint_D \left(30 - x^2 - 3y^2\right)\, dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^3 \left(30 - x^2 - 3y^2\right) dx\right) dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\left[30x - \frac{1}{3}x^3 - 3y^2x\right]_0^3\right) dy = \int_0^2 \left(81 - 9y^2\right)\, dy = \left[81y - 3y^3\right]_0^2 = 138$$

Exempel: Betrakta dubbelintegralen $\displaystyle\iint_D y\cos(xy)\,dxdy$,

där D är rektangeln $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$.



Om vi för varje fixt x mellan 0 och 1 integrerar i y-led från 0 till 1 så får vi;

$$\iint_D y\cos(xy)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 y\cos(xy)\,dy\right) dx = \boxed{\text{Partiell integration}} =$$

$$= \int_0^1 \left(\left[y\frac{\sin(xy)}{x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(xy)}{x}\,dy\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{\sin x}{x} + \left[\frac{\cos(xy)}{x^2}\right]_0^1\right) dx =$$

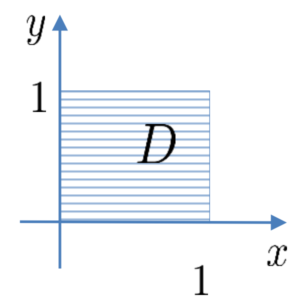
$$= \int_0^1 \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

Här kommer vi inte längre eftersom $\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2}$ saknar elementär primitiv funktion (dvs. ingen primitiv funktion kan uttryckas med enbart elementära funktioner)

På nästa sida prövar vi istället att räkna ut dubbelintegralen genom att intergera i andra ordningen.

forts. Betrakta åter igen dubbelintegralen $\displaystyle\iint_D y\cos(xy)\,dxdy$,

där D är rektangeln $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$.



Låt oss nu istället först integrera i x-led och därefter i y-led

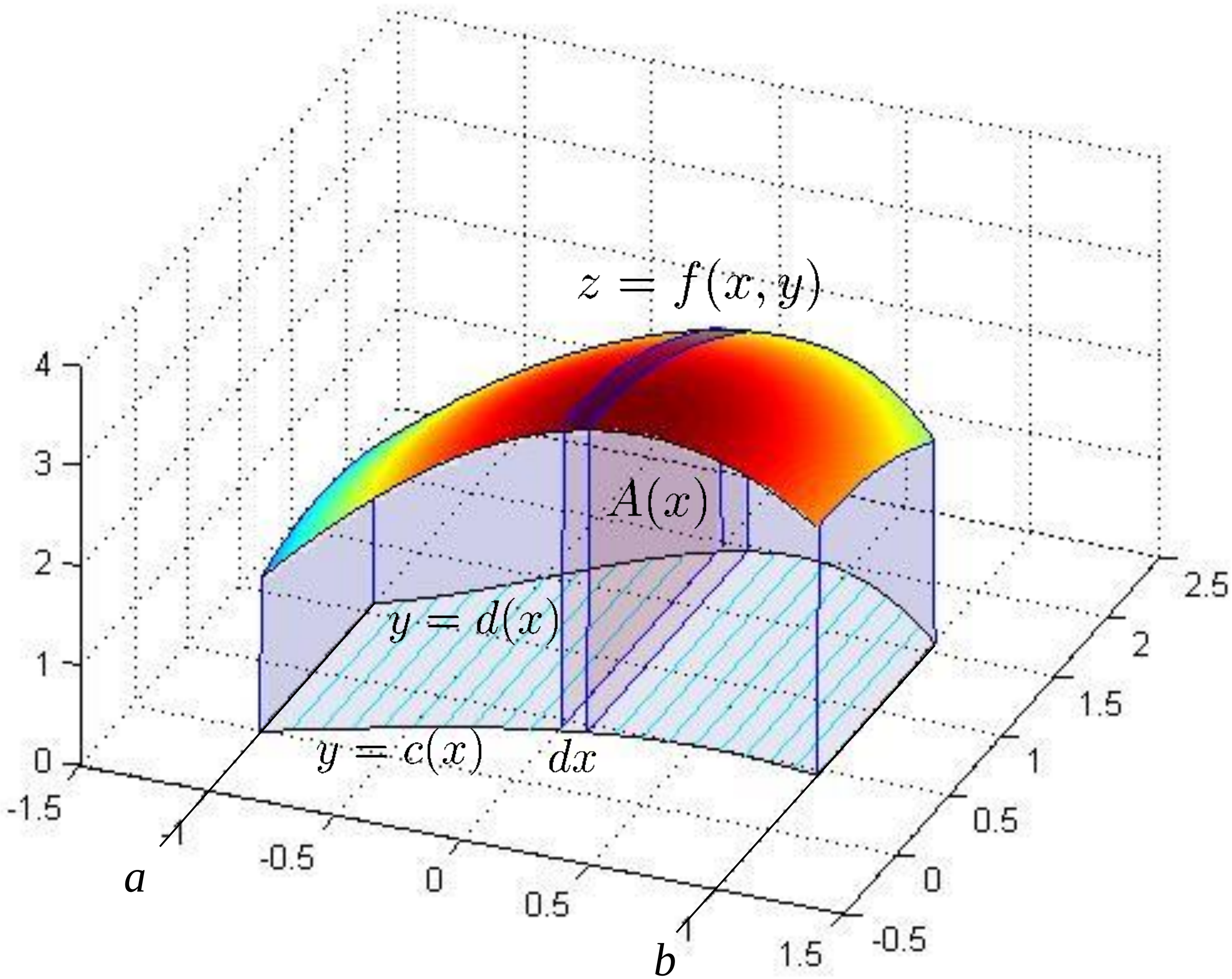
$$\iint_D y\cos(xy)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 y\cos(xy)\,dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(y \int_0^1 \cos(xy)\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(y \left[\frac{\sin(xy)}{y} \right]_0^1 \right) dy$$

$$= \int_0^1 \sin y\,dy = [-\cos y]_0^1 = 1 - \cos 1$$

Det fungerade bättre, så ibland har det alltså betydelse i vilken ordning man utför integrationen.

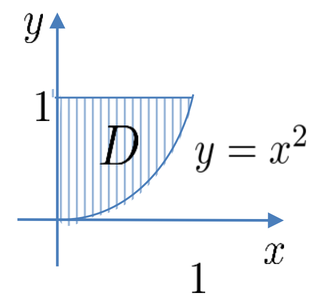
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right)\,dx$$



Exempel: Betrakta dubbelintegralen $\displaystyle\iint_D \sqrt{y}\,dxdy$,

där D är området $0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1$.

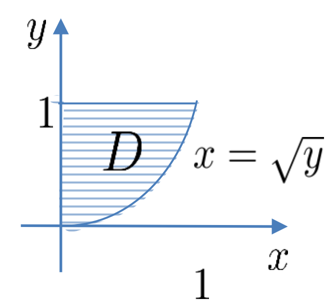
Om vi för varje fixt x mellan 0 och 1 integrerar i y-led från x^2 till 1 så får vi;



$$\iint_D \sqrt{y}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \sqrt{y}\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{2}{3} y^{3/2} \right]_{x^2}^1 dx = \frac{2}{3} \int_0^1 (1 - x^3)\,dx = \frac{2}{3} \left[x - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

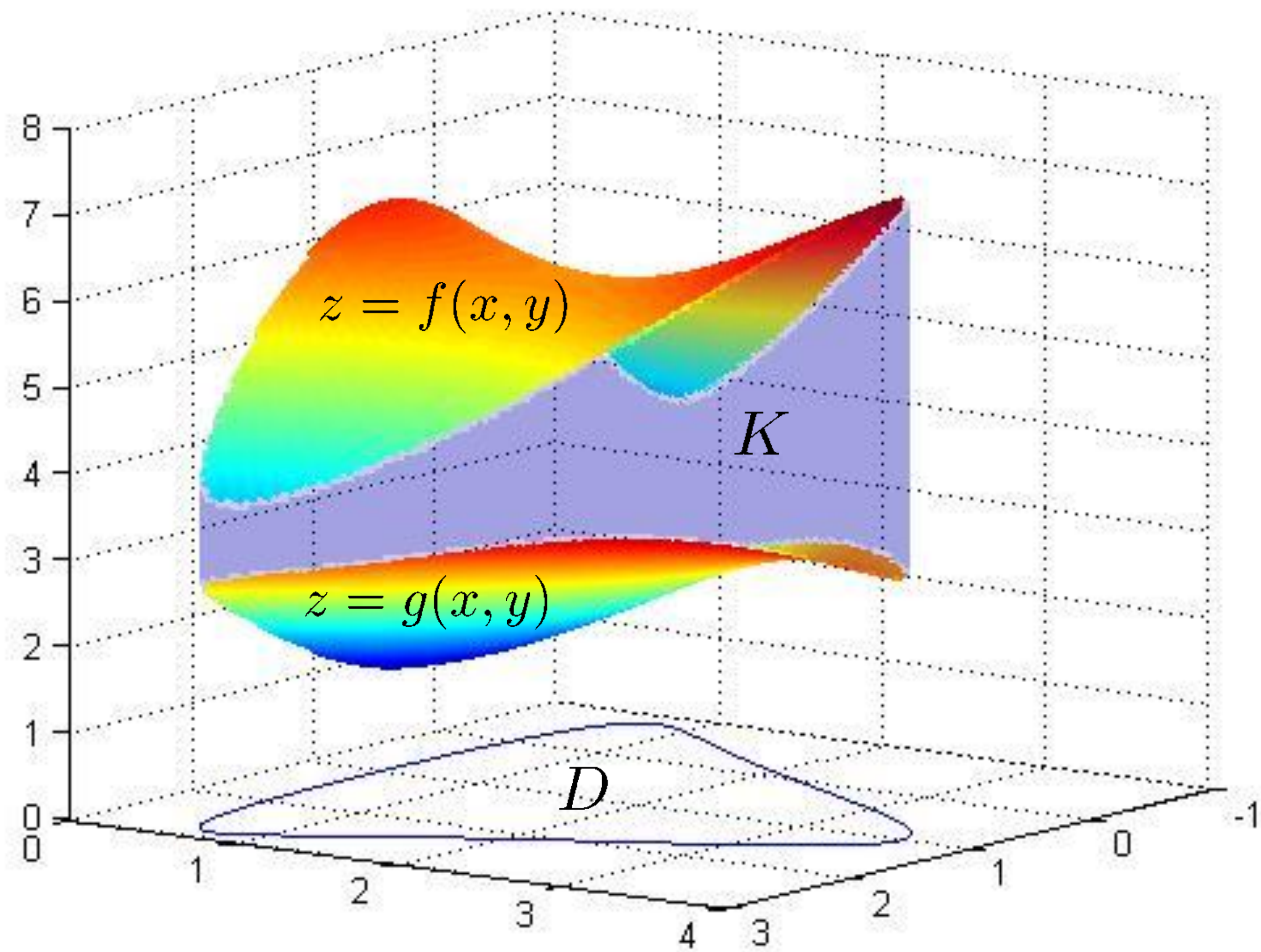
Alternativt kan vi för varje fixt y mellan 0 och 1 integrera i x-led från 0 till $\sqrt{y}$ och får då istället;



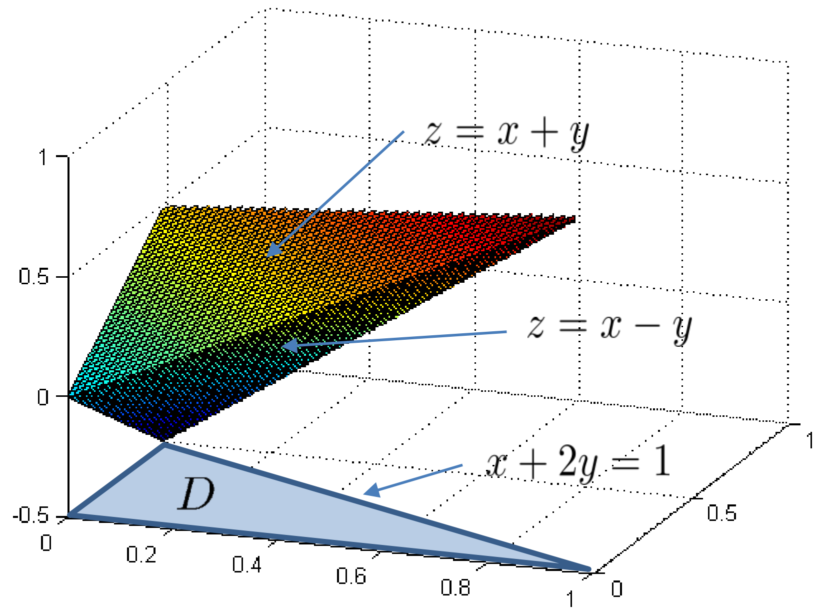
$$\iint_D \sqrt{y}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} \sqrt{y}\,dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{y} \int_0^{\sqrt{y}} dx \right) dy = \int_0^1 \sqrt{y}\sqrt{y}\,dy = \int_0^1 y\,dy = \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Volymen av } K = \iint_D \left(f(x,y) - g(x,y)\right)\, dxdy$$



Exempel: Antag att vi vill beräkna volymen av den kropp som består av alla punkter $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sådana att $(x, y) \in D$ och $x - y \le z \le x + y$, där D är den triangel i xy-planet som begränsas av koordinataxlarna och linjen $x + 2y = 1$.

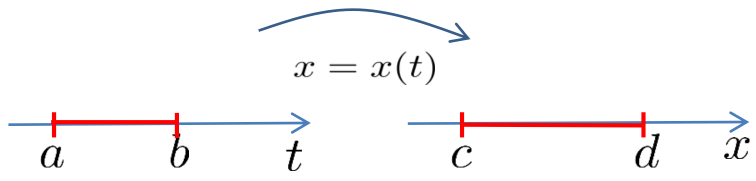


$$\text{Volymen} = \iint_D ((x+y) - (x-y))\, dxdy = \int_0^{1/2} \left(\int_0^{1-2y} 2y\, dx \right) dy =$$

$$= \int_0^{1/2} 2y(1-2y)\, dy = \left[y^2 - \frac{4}{3} y^3 \right]_0^{1/2} = \frac{1}{12}$$

Hur blir kalkylerna om man integrerar i omvända ordningen?

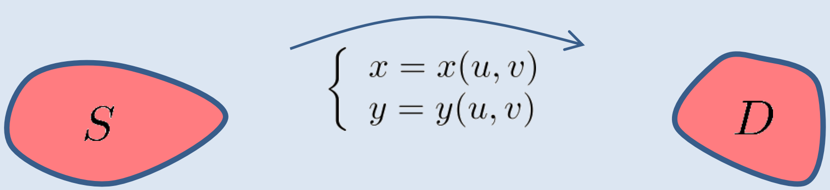
Vid variabelsubstitution i enkelintegraler
$x = x(t)$, där $x(a) = c$ och $x(b) = d$,
gäller att;



$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_a^b f(x(t))\,x'(t)\,dt$$

För dubbelintegraler gäller följande;

Sats: Om $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ är en ett-ett-avbildning från ett område S i uv-planet till ett annat område D i xy-planet



så är

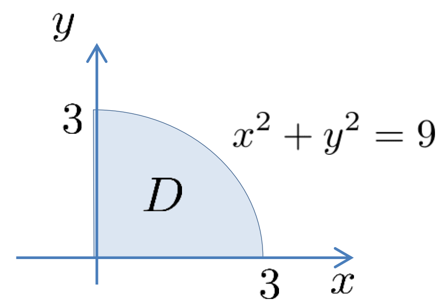
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_S f(x(u,v),y(u,v))\,\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,dudv$$

där $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ är den s.k. Jacobideterminanten $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

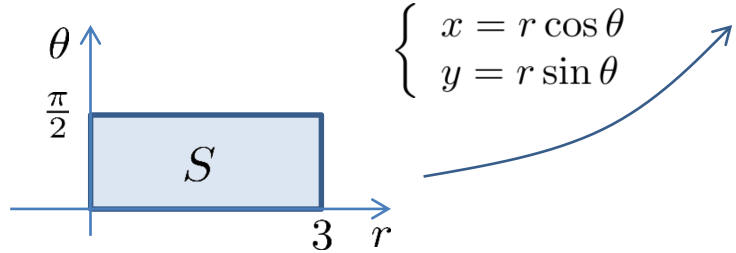
Om vi t.ex. byter från de Cartesiska koordinaterna x, y till de polära koordinaterna r, θ, dvs

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

så är $\boxed{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = \boxed{r}$



Exempel: $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dxdy$



$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dxdy = \iint_S \frac{1}{1+r^2}\, r\, drd\theta = \int_0^3 \left(\int_0^{\pi/2} \frac{r}{1+r^2}\, d\theta \right) dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^3 \frac{r}{1+r^2}\, dr = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} \ln|1+r^2| \right]_0^3 = \frac{\pi}{4} \ln 10$$

Om integranden $f(x,y)$ är obegränsad på D eller/och området D är obegränsat så säger vi att $\int_D f(x,y)\,dxdy$ är en **generaliserad dubbelintegral**. Om $f(x,y)$ **inte växlar tecken på** D så kan man definiera värdet av sådana integraler som ett gränsfall av vanliga dubbelintegraler.

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{k\to\infty} \iint_{D_k} f(x,y)\,dxdy$$

Om gränsvärdet existerar så sägs den generaliserade dubbelintegralen vara **konvergent** och i annat fall sägs den vara **divergent**.

Om $f(x,y)$ växlar tecken så delar vi upp den i sin positiva respektive negativa del;

$$f(x,y) = \underbrace{\frac{1}{2}(f(x,y)+|f(x,y)|)}_{f_+(x,y)} + \underbrace{\frac{1}{2}(f(x,y)-|f(x,y)|)}_{f_-(x,y)}$$

och säger att dubbelintegralen över $f(x,y)$ är konvergent om dubbelintegralerna över både $f_+(x,y)$ och $f_-(x,y)$ är konvergenta och sätter då;

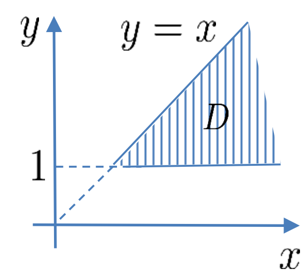
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f_+(x,y)\,dxdy + \iint_D f_-(x,y)\,dxdy$$

Om funktionen inte växlar tecken så kan samma integrationsmetoder som tidigare användas även på generaliserade dubbelintegraler.

Exempel: Betrakta dubbelintegralen $I = \iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\,dxdy$,

då D är det område i xy-planet där $1 \leq y \leq x$.

Integralen är generaliserad ty D är obegränsat. Integranden är dock positiv på D så vi får att;



$$I = \int_1^\infty \left(\int_1^x \frac{1}{(x+y)^2}\,dy \right) dx = \int_1^\infty \left[\frac{-1}{x+y} \right]_1^x dx =$$

$$= \int_1^\infty \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x} \right) dx = \left[\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x| \right]_1^\infty = \left[\ln \frac{x+1}{\sqrt{x}} \right]_1^\infty = \infty$$

Dubbelintegralen i detta exempel är således divergent.

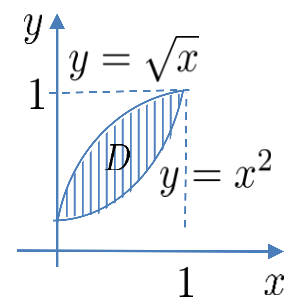
Exempel: Betrakta dubbelintegralen $I = \iint_D \frac{1}{y}\,dxdy$,

då D är det område som begränsas av parablerna $y = x^2$ och $y = \sqrt{x}$.

Integralen är generaliserad ty integranden $1/y$ är obegränsad på D, men eftersom integranden är positiv på D så får vi att;

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{1}{y}\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[\ln|y| \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$$

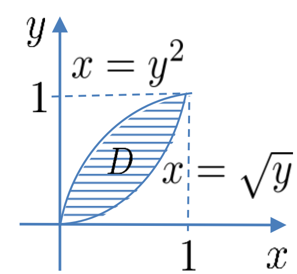
$$= \int_0^1 \frac{-3}{2} \ln x\,dx = \frac{-3}{2} \left[x \ln x - x \right]_0^1 = \frac{3}{2}$$



Alternativt kan vi integrera i omvända ordningen och får då istället;

$$I = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} \frac{1}{y}\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{y} \int_{y^2}^{\sqrt{y}} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{y} \left(\sqrt{y} - y^2 \right) dy = \left[2\sqrt{y} - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = \frac{3}{2}$$



Exempel: Betrakta dubbelintegralen $I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$

Notera först att $e^{-x^2-y^2}$ är positiv för alla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Polär substitution ger sedan att;

$$I = \int_0^\infty \left(\int_0^{2\pi} re^{-r^2}\,d\theta \right) dr = 2\pi \left[\frac{-1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty = \pi$$

Notera här också att;

$$I = \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} e^{-y^2}\,dy \right) dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\,dy \right) dx =$$

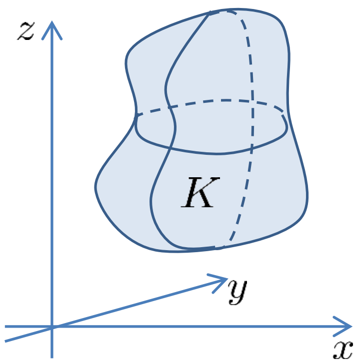
$$= \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\,dy \right) \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx \right) = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx \right)^2$$

så det följer att; $\displaystyle \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

Trippelintegraler

På ett liknande sätt som för dubbelintegraler kan man definiera **trippelintegraler**;

$$\iiint_K f(x,y,z)\,\underbrace{dxdydz}_{\text{Volymelementet } dV}$$



där K är ett område i rummet.

Även räkneregler och beräkningsmetoder är i huvudsak analoga med de för dubbelintegraler.

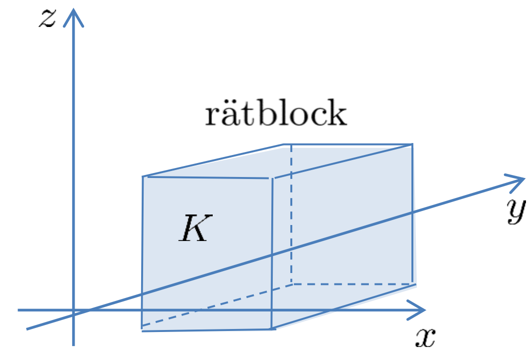
Om $f(x,y,z) \geq 0$ kan värdet på trippelintegralen tolkas som **massan** av en kropp K, då $f(x,y,z)$ är densiteten i $(x,y,z) \in K$

Speciellt är;

$$\iiint_K dxdydz = Volymen\ av\ K$$

Exempel 1: $I = \iiint_K x e^{xz+y} dx dy dz$

$K : 0 \le x \le 1\,,\ 1 \le y \le 3\,,\ -1 \le z \le 2$



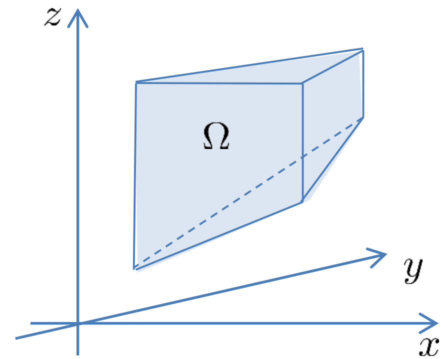
$$I = \int_0^1 \left(\int_{-1}^2 \left(\int_1^3 x e^{xz} e^y \, dy \right) \, dz \right) \, dx =$$

$$= \int_0^1 x \left(\int_{-1}^2 e^{xz} \left(\int_1^3 e^y \, dy \right) \, dz \right) \, dx =$$

$$= (e^3 - e) \int_0^1 x \left[\frac{1}{x} e^{xz} \right]_{-1}^2 \, dx =$$

$$= (e^3 - e) \int_0^1 \left(e^{2x} - e^{-x} \right) \, dx = ... = (e^3 - e)(\frac{1}{2} e^2 + e^{-1} - \frac{3}{2})$$

Exempel 2: $I = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$



$$\Omega : 1 \le y \le 3\,,\; y \le x \le 3\,,\; x+y \le z \le 7$$

$$I = \int_1^3 \left(\int_y^3 \left(\int_{x+y}^7 f(x,y,z)\,dz \right) dx \right) dy = \ldots$$

---

alltid fixa värden

ev. beroende av x och y

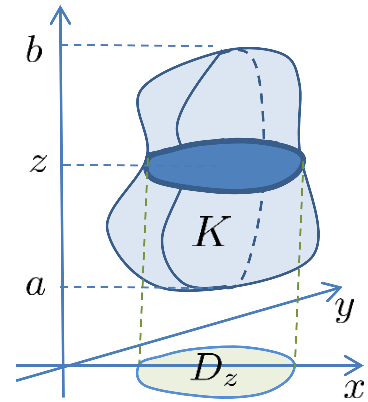
Obs! $$\int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$

ev. beroende av x

En trippelintegral kan ibland även beräknas genom en enkelintegral följt av en dubbelintegral, eller vice versa;

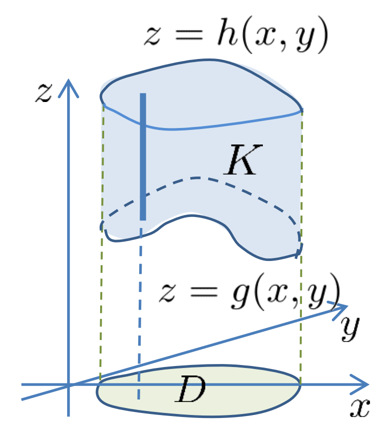
Om K är av typen: $a \leq z \leq b$, $(x, y) \in D_z$ så är;

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy \right) dz$$



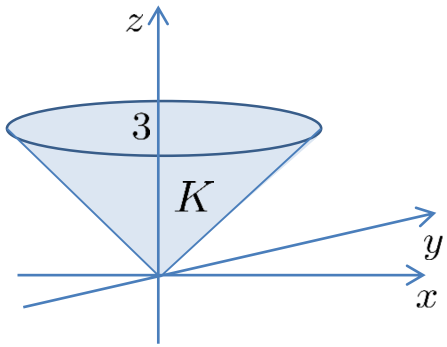
Om K är av typen: $(x, y) \in D$, $g(x,y) \leq z \leq h(x,y)$ så är;

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy$$



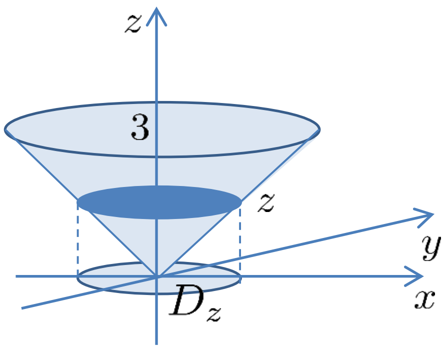
Exempel: $I = \iiint_K f(x,y,z)dxdydz$

$$K : 0 \leq z \leq 3\,,\ x^2+y^2 \leq z^2$$

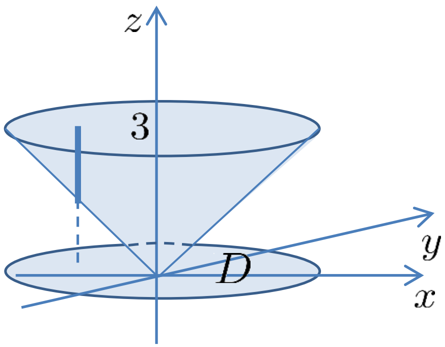


$$I = \int_0^3 \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy \right) dz = \ldots$$

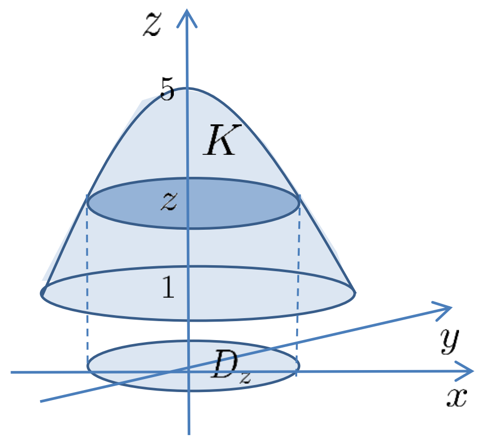
$$x^2+y^2 \leq z^2$$



$$I = \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy = \ldots$$



Exempel: Antag att vi vill bestämma massan M av den kropp som begränsas av planet $z = 1$ och paraboloiden $z = 5 - x^2 - y^2$, då densiteten ges av $\delta(x, y, z) = z$



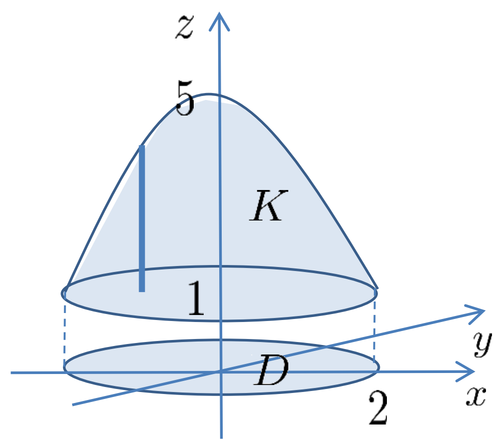
$$\text{Massan} = \iiint_K \delta(x, y, z)\, dxdydz = \int_1^5 \left(\iint_{D_z} z\, dxdy \right) dz$$

$$= \int_1^5 \left(z \iint_{D_z} dxdy \right) dz = \pi \int_1^5 z(5 - z)\, dz =$$

$$= \pi \left[\frac{5}{2} z^2 - \frac{1}{3} z^3 \right]_1^5 = \frac{56\pi}{3}$$

D_z är en cirkel med radie $\sqrt{5 - z}$ och har således arean $\pi(5 - z)$

forts. Exempel: Vi kan också beräkna massan i föregående exempel på följande sätt;

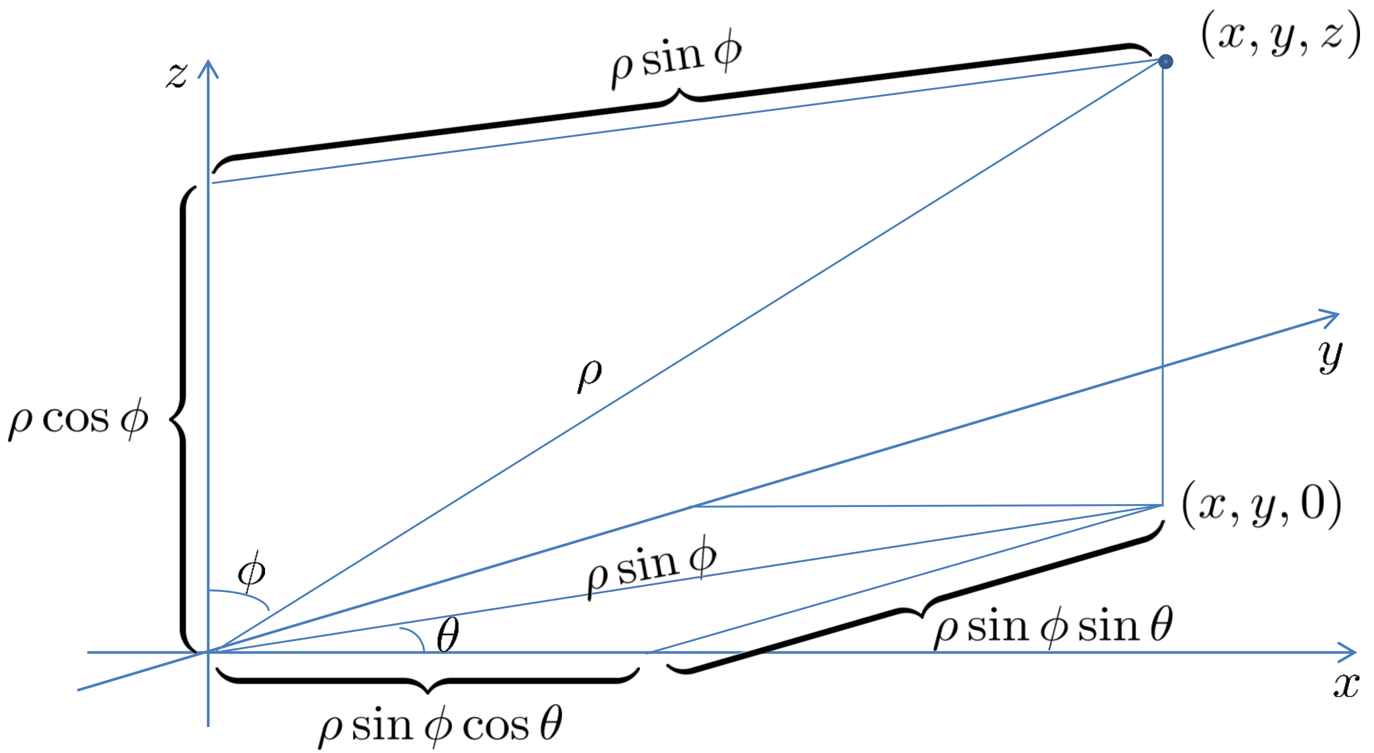


$$\text{Massan} = \iiint_K \delta(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D \left(\int_1^{5-x^2-y^2} z\,dz \right) dxdy =$$

$$= \iint_D \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_1^{5-x^2-y^2} dxdy = \frac{1}{2} \iint_D \left((5-x^2-y^2)^2 - 1 \right) dxdy =$$

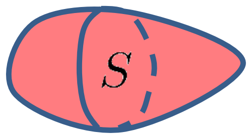
$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left((5-r^2)^2 - 1 \right) r\,d\theta dr = \pi \left[\frac{-1}{6} (5-r^2)^3 - \frac{1}{2} r^2 \right]_0^2 = \frac{56\pi}{3}$$

Sfäriska koordinater

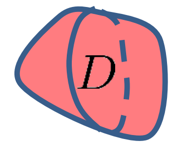


$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

Variabelsubstitution i trippelintegraler



$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$



$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint_S f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\,dudvdw$$

Jacobideterminanten

Jacobideterminanten vid övergång till sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{vmatrix}$$

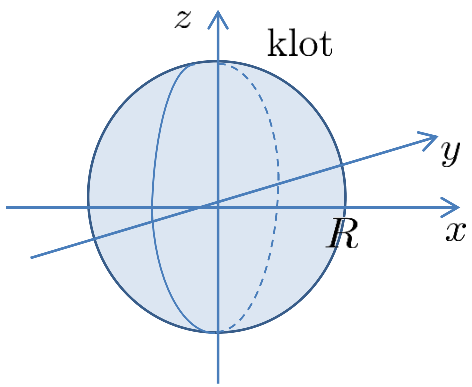
$$= \ldots = \rho^2 \sin\phi$$

se sid 828

$$dV = dx dy dz = \underbrace{\rho^2 \sin\phi \, d\theta d\phi d\rho}_{\text{volymelementet i sfäriska koordinater}}$$

Exempel: $I = \iiint_K dxdydz$

$K : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$



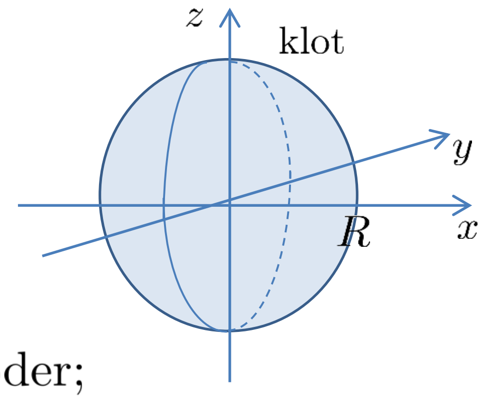
$$I = \int_0^R \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\phi \, d\theta \right) \, d\phi \right) \, d\rho =$$

volymen av ett
klot med radie R

$$= 2\pi \int_0^R \rho^2 \left(\int_0^\pi \sin\phi \, d\phi \right) \, d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^R [-\cos\phi]_0^\pi = \boxed{\frac{4\pi}{3} R^3}$$

forts Exempel: $I = \iiint_K dxdydz$

$K : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$



Integralen kan även beräknas med tidigare metoder;

$$I = \int_{-R}^{R} \left(\iint_{x^2+y^2 \leq R^2 - z^2} dxdy \right) dz \; = \int_{-R}^{R} \left(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \left(\int_0^{2\pi} r \, d\theta \right) dr \right) dz =$$

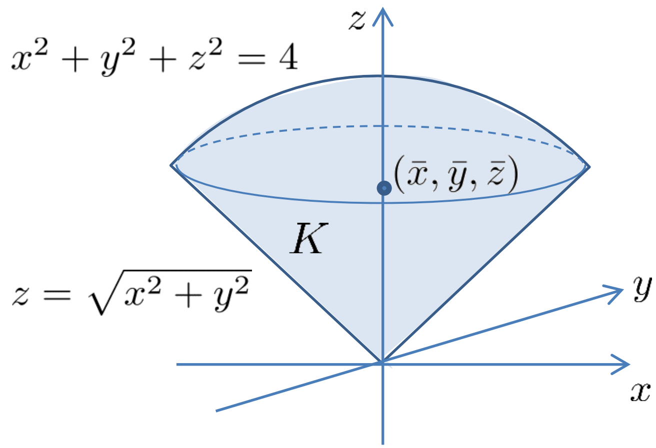
$$= 2\pi \int_{-R}^{R} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dz \; = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - z^2 \right) dz \; = \pi \left[R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_{-R}^{R} = \boxed{\frac{4\pi}{3} R^3}$$

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \right) dxdy = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} 2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dxdy =$$

$$= 2 \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - r^2} \, r \, d\theta \right) dr \; = 2\pi \left[-\frac{2}{3} \left(R^2 - r^2 \right)^{3/2} \right]_0^R = \boxed{\frac{4\pi}{3} R^3}$$

Uppgift: Bestäm masscentrum$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ av den kropp K som består av ett homogent material och som begränsas nedåt av konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och uppåt av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Lösning:



Om $\delta(x, y, z)$ är densiteten i en punkt (x, y, z) så bestäms masscentrum av;

$$\bar{x} = \frac{\iiint_K x\delta(x,y,z)\,dxdydz}{\boxed{\iiint_K \delta(x,y,z)\,dxdydz}} = 0 \text{ av symmetriskäl}$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_K y\delta(x,y,z)\,dxdydz}{\boxed{\iiint_K \delta(x,y,z)\,dxdydz}} = 0 \text{ av symmetriskäl}$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_K z\delta(x,y,z)\,dxdydz}{\boxed{\iiint_K \delta(x,y,z)\,dxdydz}}$$

kroppens massa

forts. lösning:

Eftersom kroppen består av homogent material är $\delta(x,y,z) = C$ och därmed;

$$\bar{z} = \frac{\iiint_K z\delta(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_K \delta(x,y,z)\,dxdydz} = \frac{\iiint_K z\,dxdydz}{\boxed{\iiint_K\, dxdydz}} \longleftarrow \text{kroppens volym}$$

$$\iiint_K dxdydz = \int_0^2 \left(\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\phi\, d\theta\right) d\phi\right) d\rho$$

$$= 2\pi\,[-\cos\phi]_0^{\pi/4} \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^2 = \frac{16\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\iiint_K z\,dxdydz = \int_0^2 \left(\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\pi} \rho\cos\phi\,\rho^2 \sin\phi\, d\theta\right) d\phi\right) d\rho$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2}\sin^2\phi\right]_0^{\pi/4} \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^2 = 2\pi$$

så $\bar{z} = \dfrac{2\pi}{\frac{16\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \dfrac{3\sqrt{2}}{8\left(\sqrt{2}-1\right)} \approx 1.28$

Kurvor och vektoranalys

Vektorvärda funktioner av en variabel

Antag att $x(t)$ och $y(t)$ är två reellvärda funktioner av en variabel

$$t \longrightarrow x(t) \qquad\qquad t \longrightarrow y(t)$$

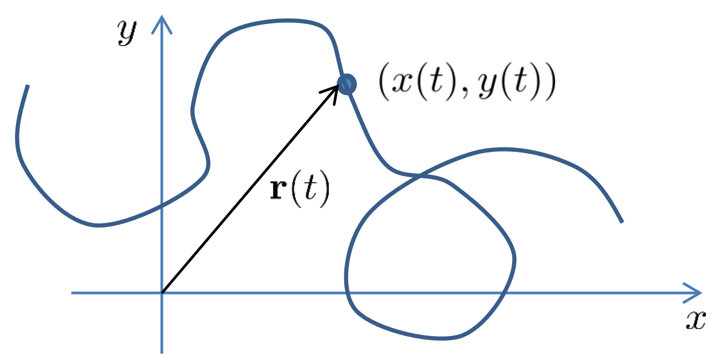
Vi kan para ihop funktionerna och får då en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}^2$

$$t \longrightarrow (x(t), y(t))$$

Om vi betecknar denna funktion med $\mathbf{r}$ så är alltså;

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

Ett sätt att åskådligöra denna funktion
är att tänka sig $(x(t), y(t))$ som positionen
i xy-planet hos en partikel vid tiden t



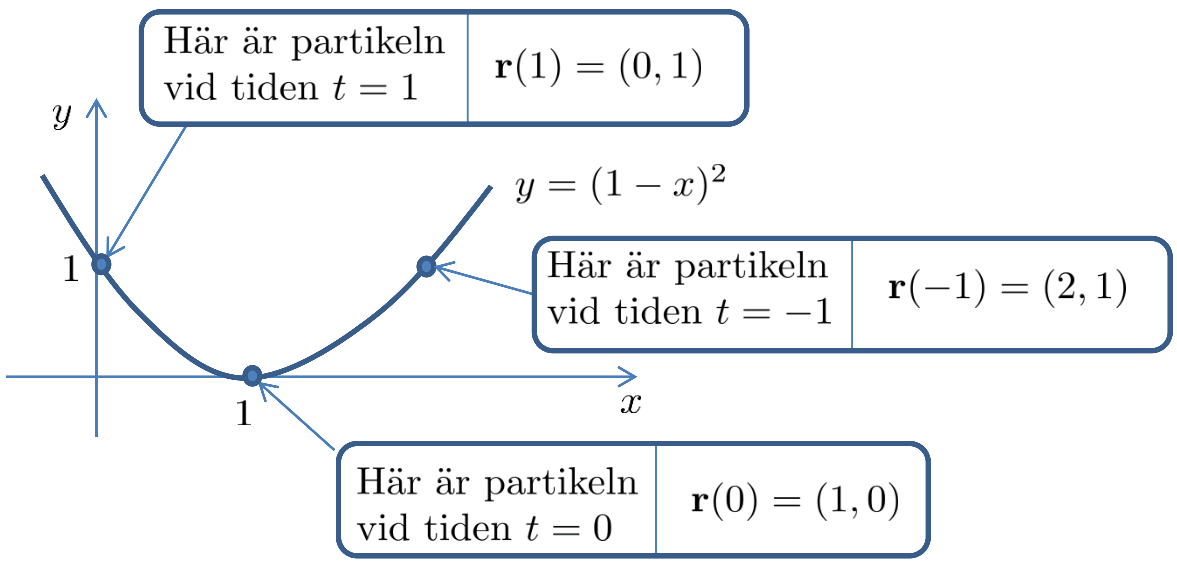
Partikeln genomlöper då en kurva i xy -planet
vars läge vid tiden t beskrivs av **positionsvektorn** $\mathbf{r}(t)$

Exempel: Betrakta den kurva i planet som beskrivs av $\mathbf{r}(t) = (1 - t, t^2)$

Här är $x(t) = 1 - t$ och $y(t) = t^2$

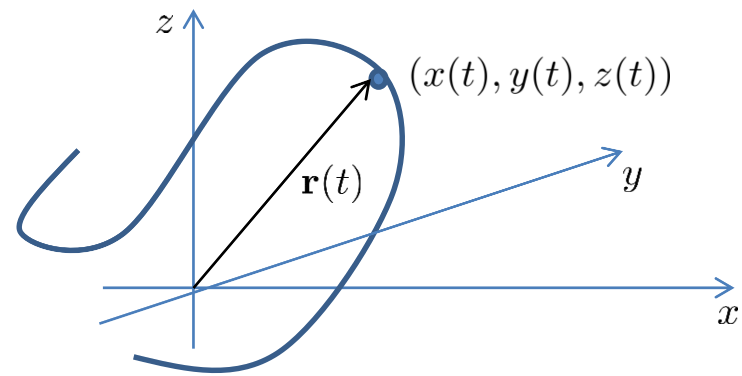
Notera speciellt att $y(t) = (1 - x(t))^2$

Så oavsett värdet på t så beskriver $\mathbf{r}(t)$ en punkt på parabeln $y = (1 - x)^2$



På samma sätt som ovan kan vi betrakta funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}^3$ som beskrivning av en partikels rörelse längs en kurva i rummet.

$$t \xrightarrow{\mathbf{r}} (x(t), y(t), z(t))$$



När man skall beskriva den vektorvärda funktionen $\mathbf{r}$ så görs det ibland även på formen;

$$\mathbf{r} \ : \ \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \text{eller} \qquad \boxed{\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}}$$

detta skrivsätt används
mycket i Adams

Oavsett hur man väljer att beskriva $\mathbf{r}(t)$ så säger man att $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ är en parameterframställning eller **parametrisering** av kurvan.

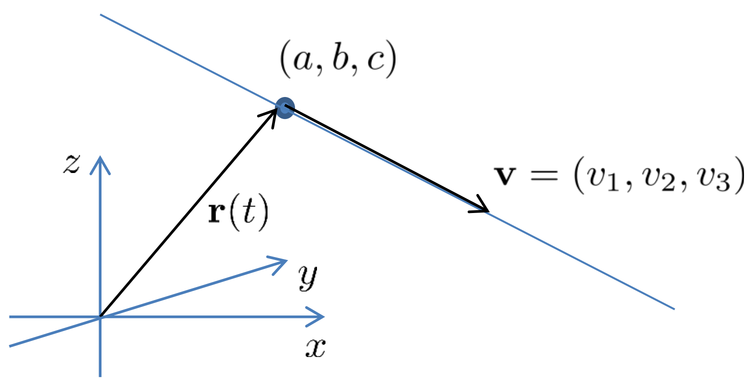
Kurvor i xy-planet kan betraktas som kurvor i rummet s.a. $z(t) \equiv 0$

Varje kurva kan parametriseras på oändligt många sätt (eftersom en partikel kan genomlöpa kurvan med varierande farter och riktningar)

Kom t.ex. ihåg från tidigare kurser att

$$\begin{cases} x = a + tv_1 \\ y = b + tv_2 \\ z = c + tv_3 \end{cases}$$

är en parameterframställning av en linje i rummet

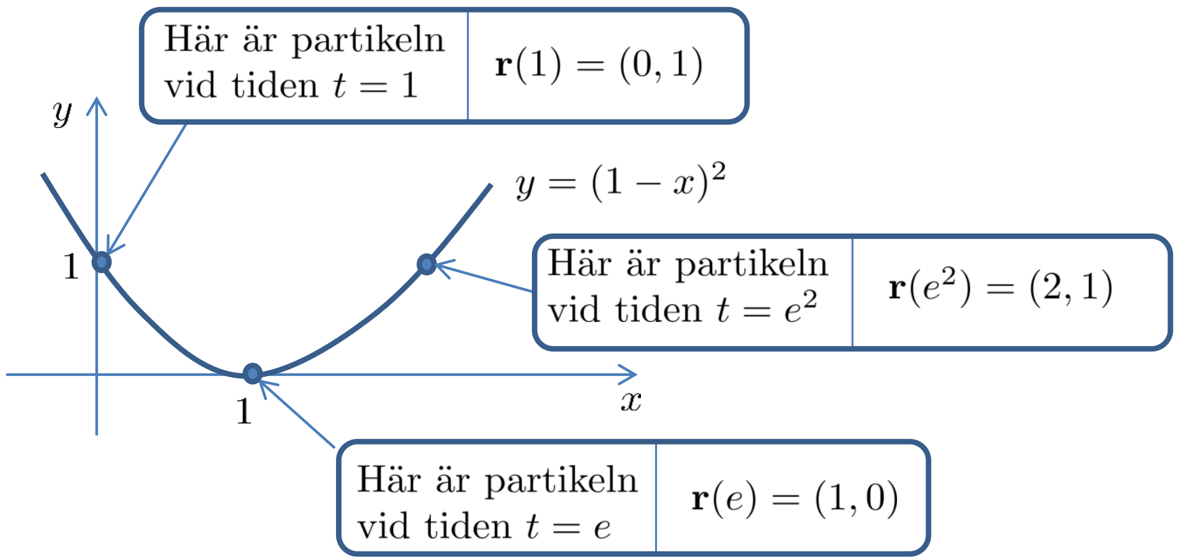


och det blir samma linje oavsett vilken punkt (a, b, c) på linjen man väljer och oavsett vilken riktningsvektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ för linjen man väljer.

forts. Exempel: Parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\ln t, (1 - \ln t)^2)$, $0 < t < \infty$ beskriver samma kurva som i det tidigare exemplet ty;

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = (1 - \ln t)^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = (1 - x)^2$$

och varje punkt på parabeln motsvaras av något t s.a. $0 < t < \infty$

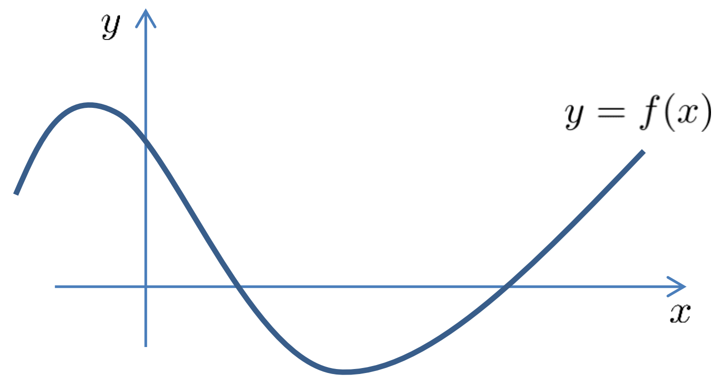


Notera speciellt att i denna parametrisering så genomlöps kurvan i den andra riktningen

Här är några fler exempel;

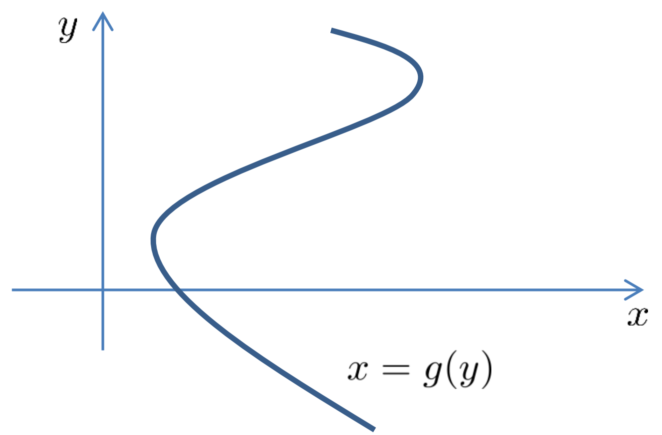
Exempel: En funktionskurva $y = f(x)$ parametriseras naturligt av;

$$\mathbf{r} \ : \ \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$



Exempel: En funktionskurva $x = g(y)$ parametriseras naturligt av;

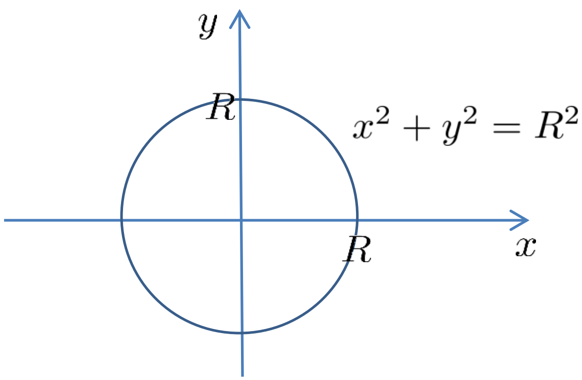
$$\mathbf{r} \ : \ \begin{cases} x = g(t) \\ y = t \end{cases}$$



Exempel: En cirkel $x^2 + y^2 = R^2$ i xy-planet parametriseras naturligt av;

$$\mathbf{r} \ : \ \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$$

$$0 \le t < 2\pi$$

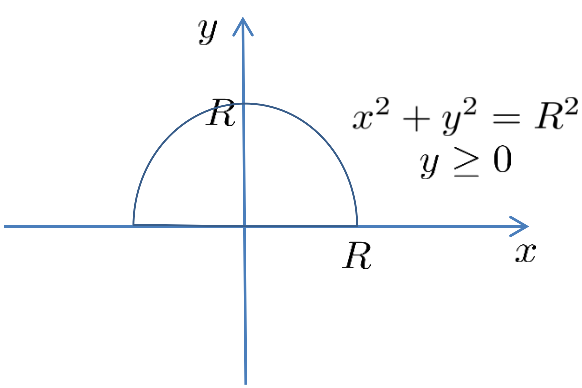


men det finns som sagt oändligt många andra sätt att parametrisera en cirkel.

om man t.ex. bara vill beskriva den övre delen av cirkeln så kan man också tänka sig att se det som en funktionskurva och välja parametriseringen;

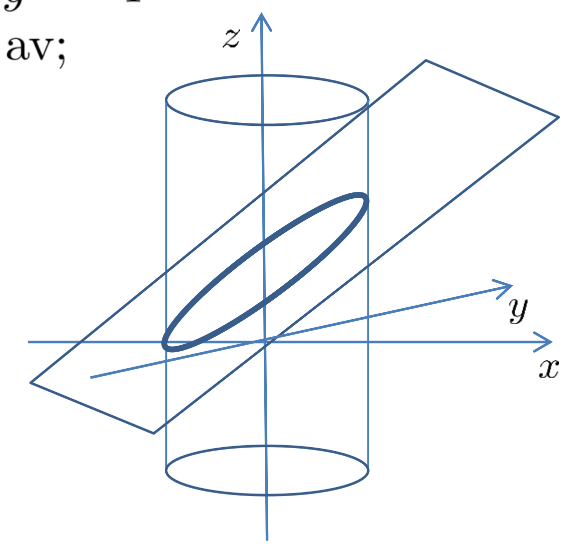
$$\mathbf{r} \ : \ \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{R^2 - t^2} \end{cases}$$

$$-R \le t < R$$



Ibland vill man också studera skärningskurvan mellan två ytor;

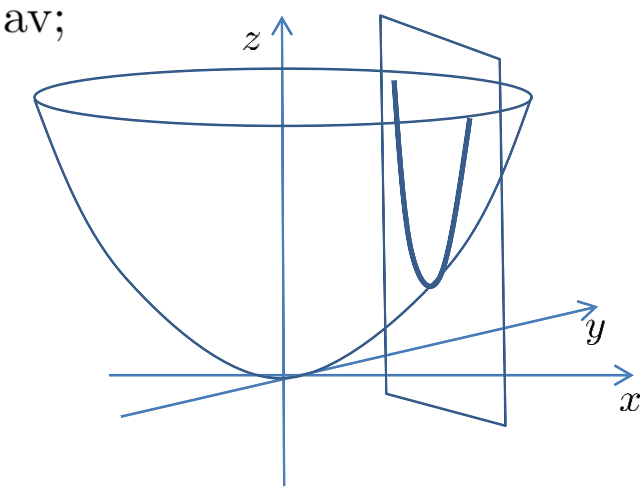
Exempel: Skärningskurvan mellan cylindern $x^2 + y^2 = 4$ och planet $z = x + 3y + 2$ kan t.ex. parametriseras av;



$$\mathbf{r} \;:\; \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 2\cos t + 6\sin t + 2 \end{cases}$$

$$0 \leq t < 2\pi$$

Exempel: Skärningskurvan mellan paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $x = 2 - 3y$ kan t.ex. parametriseras av;



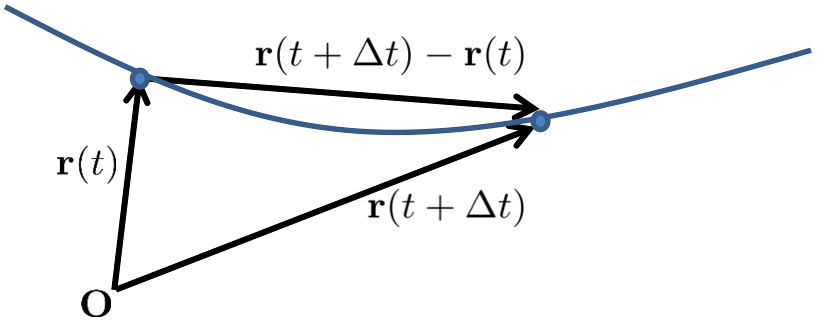
$$\mathbf{r} \;:\; \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = t \\ z = (2-3t)^2 + t^2 \end{cases}$$

$$-\infty < t < \infty$$

Antag nu att $\mathbf{r}(t)$ beskriver positionen hos en partikel som rör sig längs en kurva i rummet/planet

Vi kan studera hur partikelns position förändras i förhållande till tiden;

$$\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$



Gränsvärdet då $\Delta t \to 0$ ger **hastigheten** hos partikeln vid tiden t i punkten $\mathbf{r}(t)$

$$\mathbf{r}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

Hastigheten betecknas även $\mathbf{v}(t)$ så $\mathbf{r}'(t)=\mathbf{v}(t)$

Notera att;

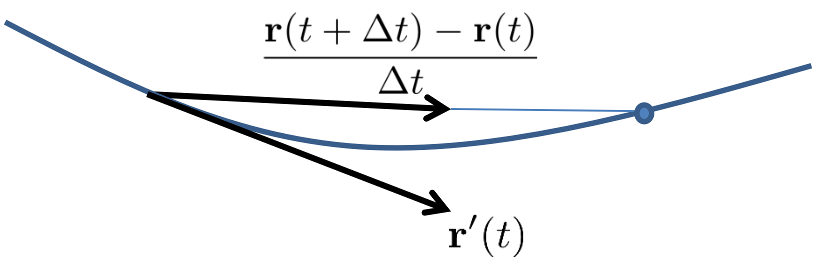
$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\mathbf{j} + \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}\mathbf{k} \right) =$$

$$= x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

så hastigheten är den vektor som fås genom att derivera positionsvektorn komponentvis

Man inser lätt att hastighetsvektorn tangerar kurvan i $\mathbf{r}(t)$ och pekar i partikelns rörelseriktning.



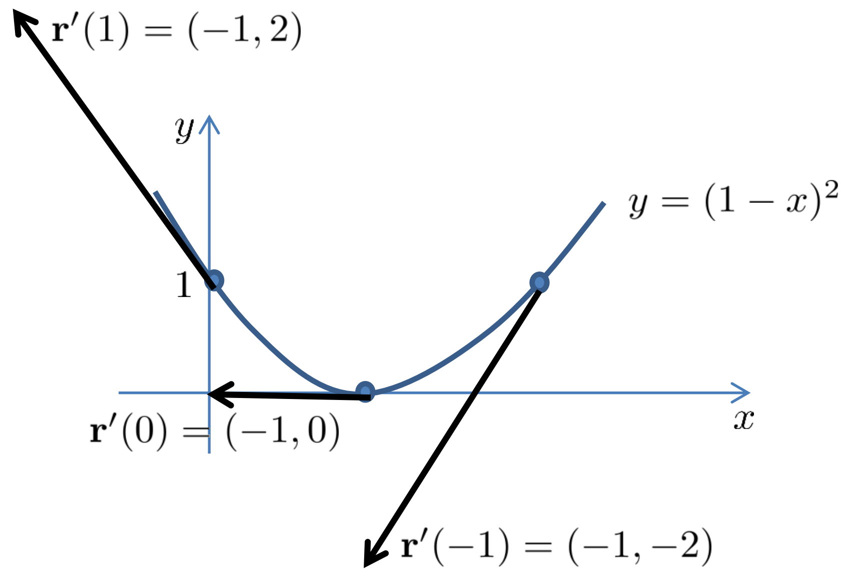
Längden av hastighetsvektorn ger ett mått på partikelns **fart** vid tiden t;

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

Exempel: Betrakta åter igen den kurva i planet som beskrivs av

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t, t^2)$$

Partikelns hastighet vid en viss tidpunkt t är $\mathbf{r}'(t) = (-1, 2t)$



och partikelns fart vid en viss tidpunkt t är;

$$v(t) = |\mathbf{r}'(t)| = |(-1, 2t)| = \sqrt{(-1)^2 + (2t)^2} = \sqrt{1 + 4t^2}$$

Vi kan också studera hur hastigheten förändras i förhållande till tiden och får då **accelerationen**;

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$$

Exempel:

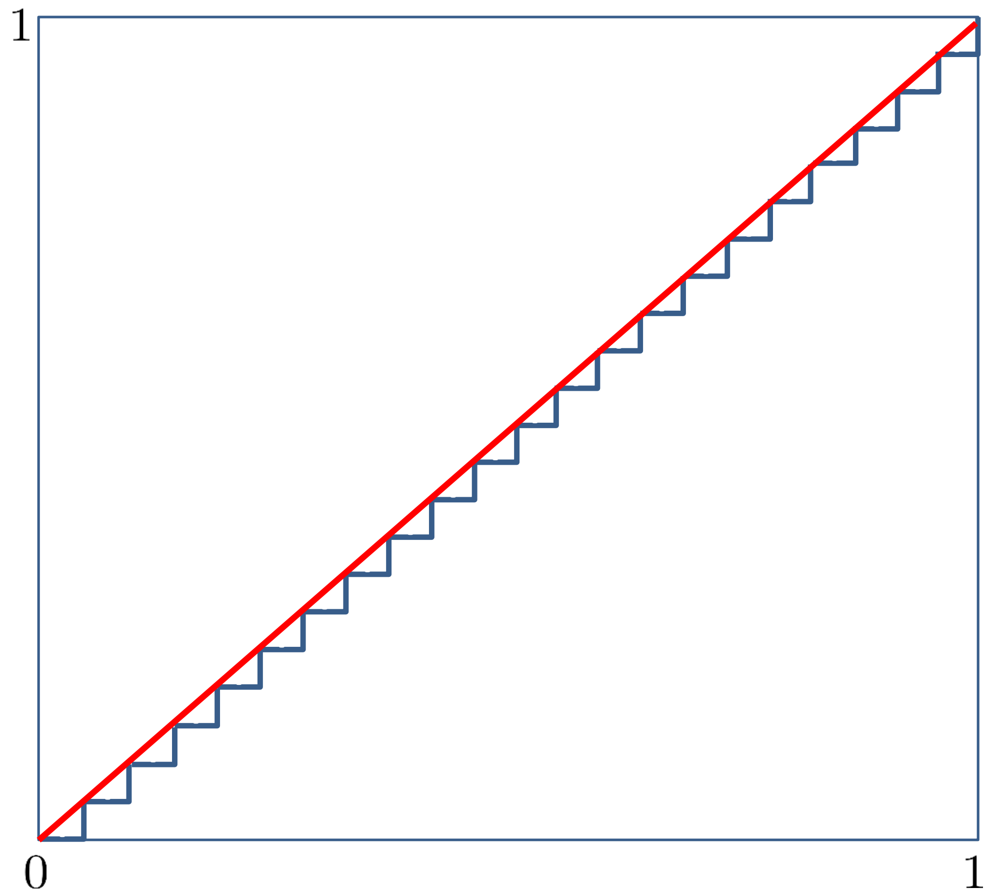
$$\mathbf{r}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + t\cos t\,\mathbf{j} + (t^2 - t)\mathbf{k} \qquad \longleftarrow \qquad \text{positionsvektorn}$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \cos t\,\mathbf{i} + (\cos t - t\sin t)\,\mathbf{j} + (2t-1)\mathbf{k} \qquad \longleftarrow \qquad \text{hastighetsvektorn}$$

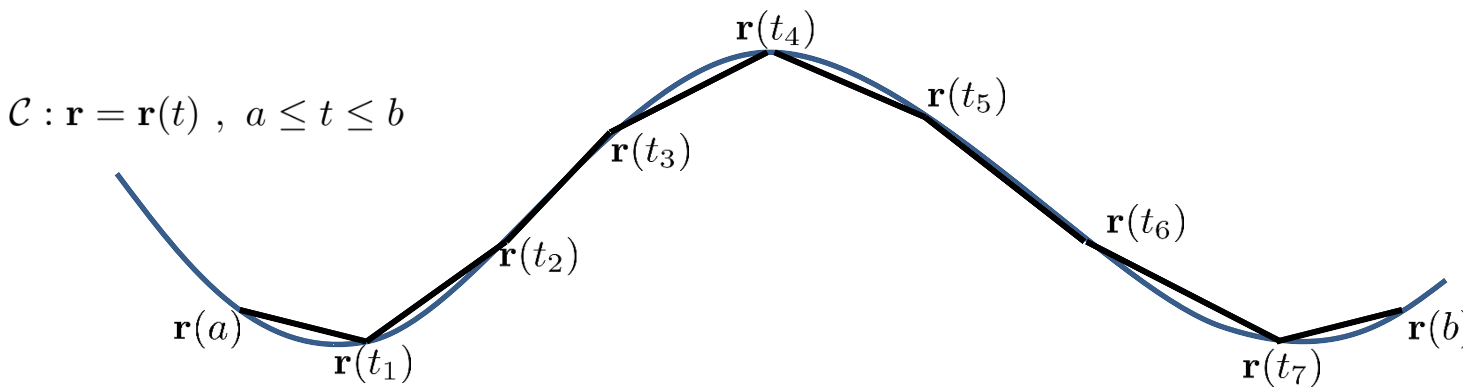
$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(\cos t)^2 + (\cos t - t\ \sin t)^2 + (2t-1)^2} \qquad \longleftarrow \qquad \text{farten}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -\sin t\,\mathbf{i} - (2\sin t + t\cos t)\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \qquad \longleftarrow \qquad \text{accelerationsvektorn}$$

Det är inte uppenbart hur man skall mäta längden av kurvor.
Två kurvor kan ha helt olika längd trots att de ligger ”nära ” varandra.
Betrakta t.ex. följande exempel;



Lokalt kan vi uppskatta kurvans längd m.h.a. räta linjestycken;



Om vi delar in intervallet $a \leq t \leq b$ i n delar;

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

så kommer motsvarande polygontåg att ha längden;

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})|$$

om vi sedan låter indelningens "finhet" gå mot 0 så får vi;

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right| (t_i - t_{i-1}) \ \rightarrow \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

Längden av en kurva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, kan således beräknas med;

$$\int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

Man kan visa att denna formel för beräkning av kurvlängd är oberoende av vald parametrisering.

$|\mathbf{r}'(t)|\, dt$ skall betraktas som längden av en ”infitisimalt” liten kurvbit. Denna del i formeln kallas för **båglängdselementet** och betecknas ds så

$$ds = |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

och eftersom värdet på integralen inte beror på parametrisering så betecknar vi kurvlängden med integralen;

$$\int_{\mathcal{C}} ds$$

dvs.

$$\boxed{\text{Längden av kurvan } \mathcal{C} = \int_{\mathcal{C}} ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt}$$

Exempel: Betrakta den kurva $\mathcal{C}$ som beskrivs av parametriseringen;

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}\ ,\ 1 \leq t \leq 3$$

Vi har $\quad \mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \dfrac{1}{t}\mathbf{k}$

så

Längden av kurvan $\mathcal{C} = \int_{\mathcal{C}} ds = \int_1^3 |\mathbf{r}'(t)|\,dt =$

$$= \int_1^3 \sqrt{(2t)^2 + 2^2 + (\tfrac{1}{t})^2}\,dt = \int_1^3 \sqrt{4t^2 + 4 + \tfrac{1}{t^2}}\,dt =$$

$$= \int_1^3 \sqrt{(2t + \tfrac{1}{t})^2}\,dt = \int_1^3 (2t + \tfrac{1}{t})\,dt = \left[t^2 + \ln t\right]_1^3 = 8 + \ln 3$$

Mer allmänt definieras kurvintegraler genom;

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\,dt$$

Om man tänker sig att kurvan $\mathcal{C}$ beskriver en tunn tråd och att $f(x,y,z)$ är densiteten i respektive punkt på kurvan så ger en sådan kurvintegralen den totala massan av tråden (om $f(x,y,z) \equiv 1$ får vi speciellt längden av kurvan).

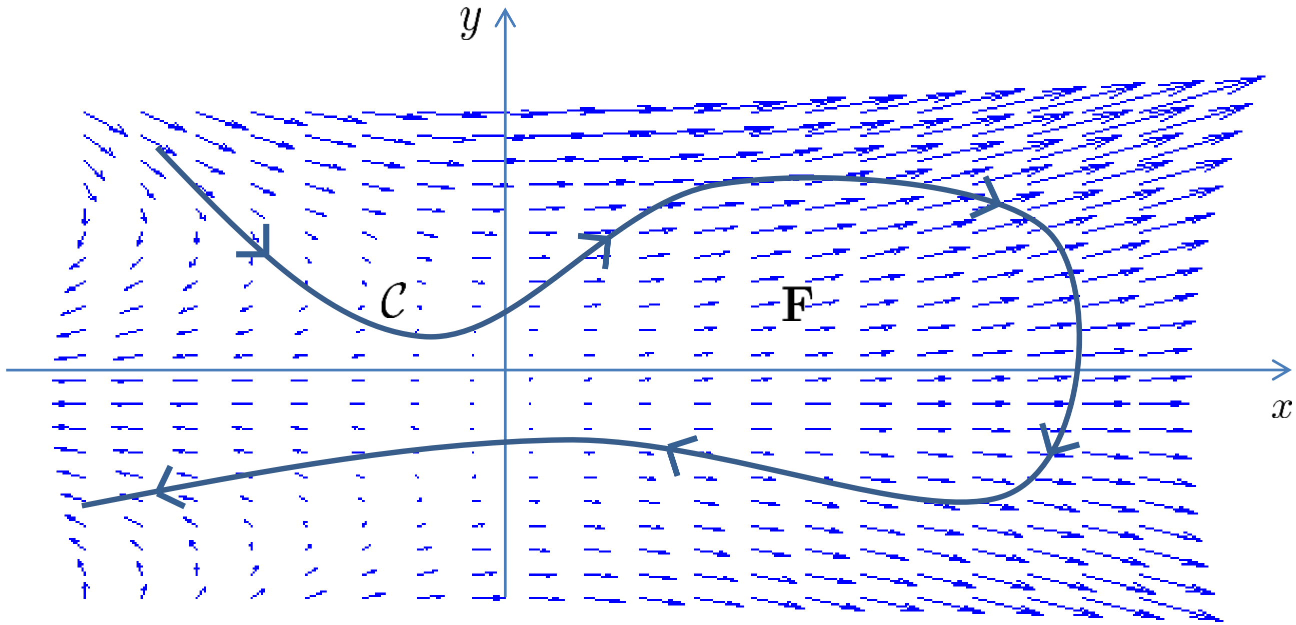
Exempel: Bestäm totala massan av den tråd som beskrivs av $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, då densiteten i varje punkt (x,y) på tråden ges av $\delta(x,y) = \sqrt{y}$.

Kurvan parametriseras naturligt av $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$, så

$$Massan = \int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\,ds = \int_0^1 \underbrace{\sqrt{t^2}}_{f(\mathbf{r}(t))}\underbrace{\sqrt{1^2+(2t)^2}}_{|\mathbf{r}'(t)|}\,dt =$$

$$= \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\,dt = \left[\frac{1}{12}(1+4t^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

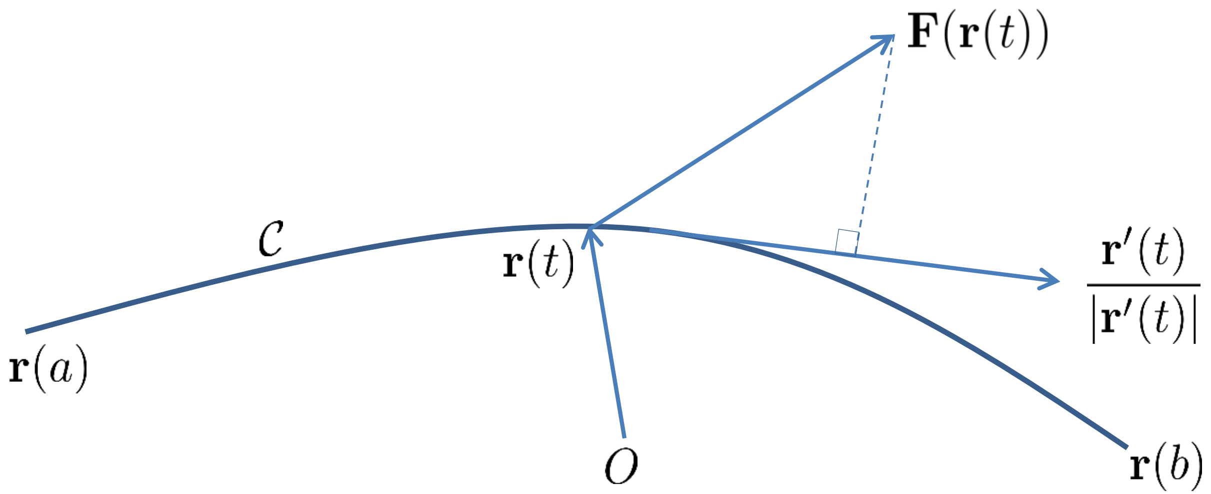
Antag nu att en partikel rör sig längs en kurva $\mathcal{C}$ under påverkan av ett kraftfält eller strömning $\mathbf{F}(x, y, z)$



Vektorfältet $\mathbf{F}$ kan t.ex. representera ett elektrostatiskt fält, magnetfält, gravitationsfält eller så beskriver $\mathbf{F}$ någon typ av strömning av materia (t.ex. vatten) eller energi (t.ex. värme).

Pilarnas riktning och längd illustrerar vektorfältets storlek och riktning i respektive punkt.

Vi skall nu intressera oss för det arbete ett sådant vektorfält uträttar på partikeln då den rör sig utefter kurvan $\mathcal{C}$ dvs. den energi som vektorfältet tillför partikeln.



Det arbete som fältet uträttar vid förflyttning längs $\mathcal{C}$ är således;

$$\boxed{ds = |\mathbf{r}'(t)|\,dt}$$

$$\int_a^b \underbrace{\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}}_{\text{Kraftens storlek i partikelns rörelseriktning}} ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

Om $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, så är $\displaystyle\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt =$

Kurvintegralens värde är oberoende av vald parametrisering av kurvan.

$$= \int_a^b (F_1(x(t), y(t), z(t))\underbrace{x'(t)dt}_{dx} + F_2(x(t), y(t), z(t))\underbrace{y'(t)dt}_{dy} + F_3(x(t), y(t), z(t))\underbrace{z'(t)dt}_{dz}) =$$

$$= \int_{\mathcal{C}} \underbrace{F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz}_{\text{Differentialform}} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

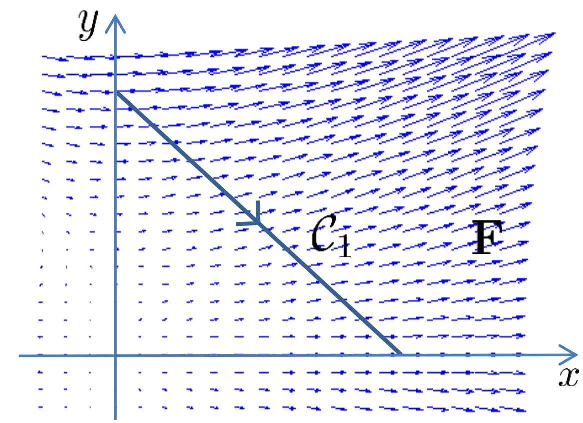
$$\boxed{d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}}$$

Alla dessa led är bara olika sätt att skriva samma kurvintegral, som alltså ger det totala arbete som vektorfältet uträttar på en partikel som rör sig utefter kurvan $\mathcal{C}$.

Om $\mathbf{F}$ är ett plant vektorfält dvs på formen $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$ och $\mathcal{C}$ en kurva i xy-planet, så är speciellt;

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy = \int_a^b (F_1(x(t), y(t))x'(t)dt + F_2(x(t), y(t))y'(t)dt)$$

Exempel: Låt $\mathbf{F} = (x + y^2)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ och låt $\mathcal{C}_1$ vara den raka sträckan från $(0, 1)$ till $(1, 0)$.



En parametrisering av kurvan är

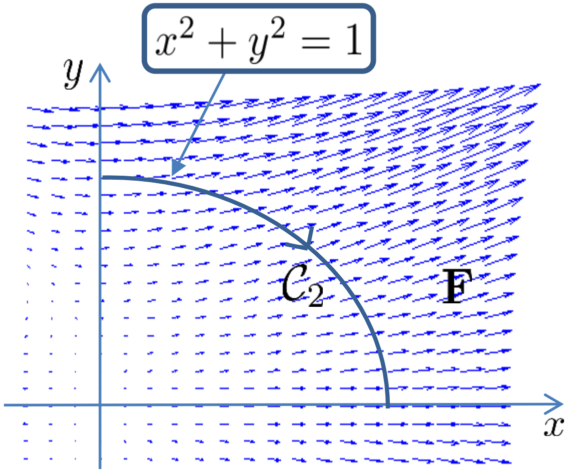
$\mathbf{r}(t) = \underbrace{t}_{x(t)}\mathbf{i} + \underbrace{(1-t)}_{y(t)}\mathbf{j}\ ,\ 0 \xrightarrow{t} 1,$

så det arbete som vektorfältet $\mathbf{F}$ uträttar är;

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} (x + y^2)\, dx + xy\, dy = \int_0^1 (t + (1-t)^2) \underbrace{dt}_{dx} + t(1-t) \underbrace{(-1)\, dt}_{dy} =$$

$$= \int_0^1 \left((1-t)^2 + t^2\right)\, dt = \left[-\frac{1}{3}(1-t)^3 + \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

forts. exempel: Låt oss nu istället beräkna arbetet längs cirkelbågen $\mathcal{C}_2$ från $(0,1)$ till $(1,0)$



En parametrisering av denna kurva är

$\mathbf{r}(t) = \underbrace{\cos t}_{x(t)}\mathbf{i} + \underbrace{\sin t}_{y(t)}\mathbf{j}$, $\pi/2 \xrightarrow{t} 0$, så arbetet är;

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} (x+y^2)\,dx + xy\,dy =$$

$$= \int_{\pi/2}^{0} (\cos t + \sin^2 t)\underbrace{(-\sin t)\,dt}_{dx} + \cos t \sin t \underbrace{\cos t\,dt}_{dy} =$$

$$= \int_{\pi/2}^{0} (\cos t + 1 - 2\cos^2 t)(-\sin t)\,dt = \left[\frac{1}{2}\cos^2 t + \cos t - \frac{2}{3}\cos^3 t\right]_{\pi/2}^{0} = \frac{5}{6}$$

Låt oss för skojs skull se hur kalkylerna istället blir med parametriseringen;

$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{1-t^2}\mathbf{j}$, $0 \xrightarrow{t} 1$,

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} (x+y^2)\,dx + xy\,dy = \int_0^1 (t+1-t^2)\,dt + t\sqrt{1-t^2}\,\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt =$$

$$= \int_0^1 (t+1-2t^2)\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{5}{6}$$

Om kurvintegralen av ett vektorfält $\mathbf{F}$ är över en sluten kurva $\mathcal{C}$ (dvs. samma start och slutpunkt) betecknas den ofta med

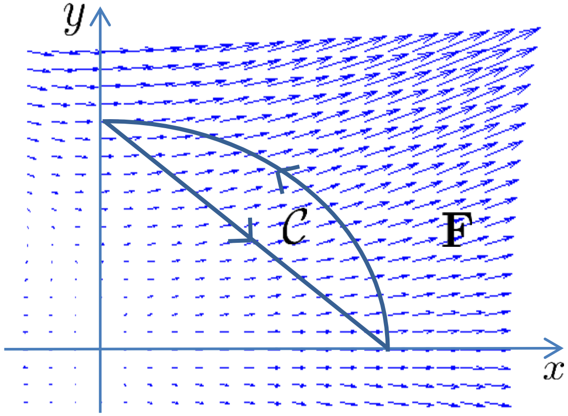
$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

och sägs då ge *cirkulationen* av $\mathbf{F}$ runt $\mathcal{C}$.

forts. exempel: Låt $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$ vara som i föregående exempel och betrakta den slutna kurva $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$ som är en sammansättning av först $\mathcal{C}_1$ och därefter $\mathcal{C}_2$ i motsatt riktning. Då är;

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} =$$

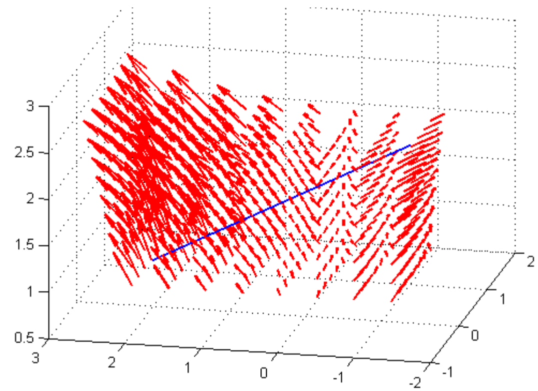
$$= \frac{2}{3} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{6}$$



Låt oss avslutningsvis också ta ett exempel på beräkning av arbete längs kurva i rummet.

Exempel: Låt oss beräkna det arbete som kraftfältet

$$\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + 2yz)\mathbf{j} + (y^2 + 1)\mathbf{k}$$



uträttar på en partikel som rör sig raka sträckan från $(1, -1, 2)$ till $(0, 2, 1)$

En riktningsvektor för sträckan är $(-1, 3, -1)$ så sträckan har parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{i} + (-1+3t)\mathbf{j} + (2-t)\mathbf{k}\ ,\ 0 \xrightarrow{t} 1$$

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} 2xy\,dx + (x^2 + 2yz)\,dy + (y^2+1)dz =$$

$$= \int_0^1 2(1-t)(-1+3t)(-1)\,dt + ((1-t)^2 + 2(-1+3t)(2-t))3\,dt + ((-1+3t)^2+1)(-1)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \left(-18t^2 + 34t - 9\right)\,dt = \left[-6t^3 + 17t^2 - 9t\right]_0^1 = 2$$