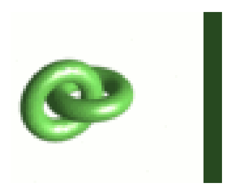
Flervariabelanalys för K/Kf/Bt (MVE470)

läsåret 2017/18



Kursansvarig: Thomas Wernstål

Kurshemsida

http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve470/1718/

Innehåller t.ex.

- info om hur **undervisningen** är organiserad
  (t.x. föreläsningsplan och info om studioövningarna mm)
- **veckoplaner**
  med bl.a. rekommenderade övningsuppgifter och lärmål
- **info om examination och betygskriterier**
- **länk till material för studioövningarna**
- **kompletterande kursmaterial**
  (t.ex. föreläsningsmaterial, gamla tentor mm)
- **viktiga meddelanden** under kursens gång som t.ex. förändringar och förtydliganden om innehåll och upplägg eller info som kursansvarige vill göra studenterna speciellt uppmärksam på.

Kursen finns även som aktivitet i Ping Pong, där du även kan;

- komma åt de **uppgifter i Maple TA** som utgör examinationen av studioövningarna

Duggor

3 stycken frivilliga bonusgrundande duggor.
30 min på övningstid.

Dugga 1 - måndag i läsvecka 3 (29 jan)

Dugga 2 - måndag i läsvecka 5 (12 feb)

Dugga 3 - måndag i läsvecka 7 (26 feb)

Maximal kan man 6 bonuspoäng
från alla duggorna att tillgodoräkna
sig på sluttentan (avrundat medelvärde)

1 Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}$

(a) Bestäm värdet på h så att $\mathbf{u}$ blir en lösning på systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (1p)

(b) Bestäm alla lösningar på systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (1p)

Lösning:

Svar: (a) (b)

2 (I denna uppgift beaktas endast svaret. Rätt svar 1 poäng, fel svar 0 poäng)
Låt $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ vara kolonnerna i matrisen A från upppgift 1 ovan dvs.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm alla lösningar på vektorekvationen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = 0$ (1p)

Svar:

(b) Skriv $\mathbf{v}_1$ som en linjärkombination av $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ (1p)

Svar:

3 Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Fyra svar rätt ger 2p. Om antalet korrekta svar överstiger antalet felaktiga svar med två eller tre så får du 1 poäng. (2p)

(a) Om ett linjärt ekvationssystem $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har mer än en lösning, så har också systemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mer än en lösning. Svar: ....

(b) Om ett linjärt ekvationssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har mer än en lösning, så har också systemet $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ mer än en lösning. Svar: ....

(c) Om $\boldsymbol{u}_4$ är en linjärkombination av $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, så är $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ linjärt beroende. Svar: ....

(d) Om $\boldsymbol{u}_4$ *inte* är en linjärkombination av $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, så är $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ linjärt oberoende. Svar: ....

Lärmål

För att uppnå godkäntnivå på kursen förväntas att du kan:

Adams	Mål
10.1, 10.5	skissa plan, cylindriska ytor och andragradsytor, utgående från ytans ekvation samt ange vilken typ av yta ekvationen representerar (se även 8.1).
10.1, 10.5	skissa kurvor, ytor och områden i rummet som beskrivs av system med ekvationer och/eller olikheter, där uttrycken är av typ som ingår i föregående lärmål.
12.1	redogöra för funktionsbegreppen (def. 12.1), begreppen nivåkurva och nivåyta samt skissa enkla nivåkurvor/nivåytor.
12.1	bestämma (den maximala) definitionsmängden för ett funktionsuttryck, samt skissa enkla funktionsytor.
12.2	ge en intuitiv beskrivning av begreppet gränsvärde (som i inledning till 12.2).
12.2	tillämpa räknereglerna för gränsvärden för funktioner av två variabler (se t.ex. ex 1).
12.2	förklara vad som menas med att en funktion är kontinuerlig och i enklare fall avgöra om en funktion är kontinuerlig.
12.3	de olika beteckningarna för partiell derivata och beräkna partiella derivator genom att tillämpa deriveringsregler för funktioner av en variabel.
12.3	bestämma tangentplan och normallinje till funktionsyta.
12.4	de olika beteckningarna för partiell derivata av högre ordning, samt beräkna sådana derivator.

För överbetyg förväntas också att du kan:

Adams	Mål
12.2	definiera begreppet gränsvärde och motivera definitionen
12.2	avgöra om en reellvärd funktion av två variabler har gränsvärde, och i förekommande fall beräkna det, då detta inte direkt går att avgöra med gränsvärdesreglerna i avs.12.2 (se ex. 3,4 & 5 i avs 12.2, samt stencilen 'Kompletterande skrift om gränsvärden' på kurshemsidan).
12.2	ge exempel på funktion av två variabler, som saknar gränsvärde då $(x, y) \to (0, 0)$ men där alla gränsvärden $f(x, kx)$, då $x \to 0$, samt $f(0, y)$, då $y \to 0$, existerar och är lika.
12.2	avgöra om en funktion är kontinuerlig då detta inte direkt går att avgöra med gränsvärdesreglerna i avs.12.2, utan också kräver kunskaper om gränsvärden motsvarande ovanstående lärmål på avs.12.2.
12.3	definiera begreppet partiell derivata och härleda tangentplanets ekvation.
12.3	beräkna partiell derivata med utgångspunkt från definitionen.

Tentamen

Är uppdelade i en godkäntdel och en överbetygsdel, men det är totalpoängen som räknas, även för betyget 3:a.

Tentamen
MVE470/MVE351 Flervariabelanalys, K/Kf/Bt/Ki
2016-08-26 08.30–12.30

Examinator: Lyudmila T, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Adam Malik, telefon:

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs antingen minst 23 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt. Bonuspoäng från duggor 2016 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. De inlämnas tillsammans med övriga lösningar.

2. (a) Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_D xy\,dA$$
där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$ och $(0,3)$.
(b) Området D utgörs av det sfäriska skallet $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$. Beräkna tri gralen
$$\iiint_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dV.$$

3. En partikel rör sig längs kurvan $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + (1+t)\boldsymbol{j}$. Skissa banan. I vilken punkt sig partikeln då dess fart är 5 (l.e./s).

4. Låt $f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$. Bestäm största oh minsta värdena för $f(x,y)$ i $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + geq0, x^2+y^2 \leq 4\}$.

5. Låt C vara randen till område i xy-planet som begränsas av linjen $y = x$ och $y = x^2$ orienterad moturs. Beräkna $\oint_C xy\,dx + (x+y)\,dy$ genom att
(a) parametrisera randbitarna och använda definitionen av kurvintegral;
(b) använda Greens formel.

Poänggränser, inklusive bonus:

Betyg 3: 23-32 poäng,
Betyg 4: 33-41 poäng,
Betyg 5: 42-56 poäng.

Del 2: Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Beräkna integralen $\iint_D \frac{x}{y}\,dxdy$ där D är området i första kvadranten som avgränsas av kurvorna $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{3}{x}$ och linjerna $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, dvs $D : \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{3}{x}$, $\frac{x}{2} \leq y \leq 2x$, $x > 0$, $y > 0$. Tips: välj ett lämpligt variabelbyte.

7. Låt C vara en skärningskurvan mellan paraboloiden $z = x^2+y^2$ och planet $z = 2x+2y+2$. Anta att C är positivt orienterad sett ovanifrån. Använd Stokes sats för att beräkna kurvintegralen $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, där $\boldsymbol{F}(x,y,z) = xy\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{k}$. (6p)

8. (a) Definiera begreppet gradient och riktningsderivata för en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Redogör för geometriska egenskaper hos gradienten. (3p)
(b) Formulera och bevisa sambandet mellan riktningsderivata och gradient. (3p)

Lycka till!
Lyudmila T

Lärare

Föreläsare och examinator: Thomas Wernstål

Räkneövningar

Bta: Andreas Dahlberg

Btb: Sebastian Andersson

Kf: Oskar Holmstedt

Ka: David Ericsson

Ka: Hanna Oppelmayer

Studioövningar

Bta: Thomas Wernstål

Btb: Erik Jansson

Kf: Oskar Eklund

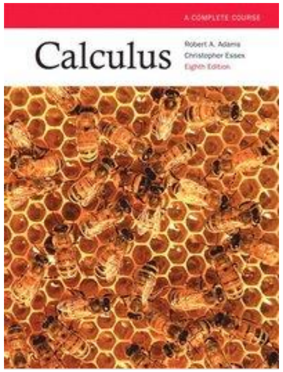
Ka: Joakim Löfgren

Ka: Niklas Nordgren

Kurslitteratur

- Calculus, a complete course, 8th edition av Robert.A.Adams & Christopher Essex

  Avsnitt: 8.2, 10.1, 10.5, 11.1, 11.3, 12.1-12.7, 12.9,
  13.1-13.3, 13.7, 14.1-14.6, 15.1-15.6, 16.1-16.5



- Material för studioövningarna nås via kurshemsidan

Flervariabelanalys

Kemiprojektet "Kemisk jämvikt" kommer introduceras av kemilärare. När och var kommer meddelas senare.
Projektet kommer räknas som studioövning 5 och ha en egen vecka i studioschemat.

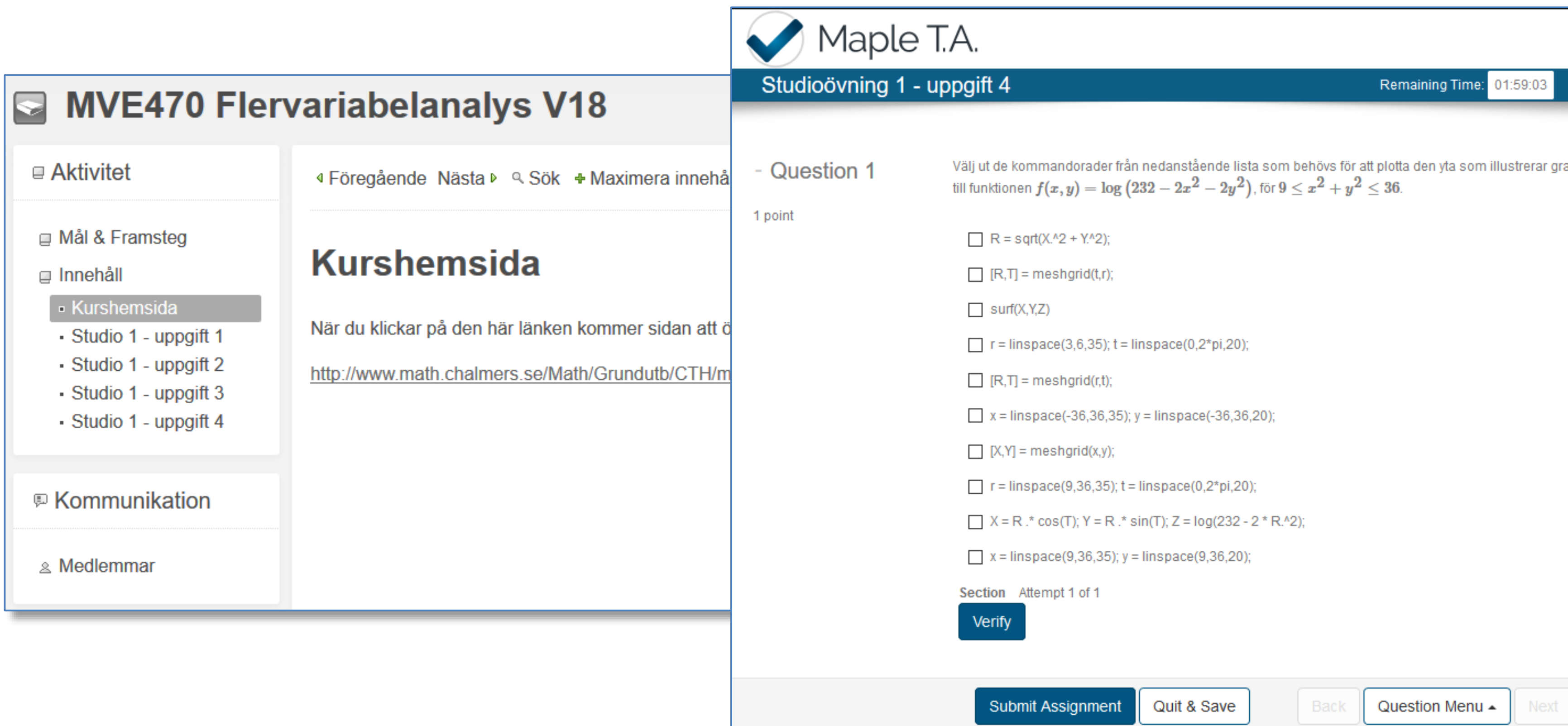
		Läshänvisning Jönsson
Vecka 1	Studio 1 - Funktionsytor och nivåkurvor	5.7-5.8
Vecka 2	Studio 2 - Linjärisering och Jacobimatris	
Vecka 3	Studio 3 - Newtons metod. Funktionerna newton och modnewton	
Vecka 4	Studio 4 - Optimering. Funktionerna sd och jacobi	
Vecka 5	Studio 5 - Jämviktsprojekt. Funktionerna fun_protolys1 och jac_protolys1 samt skriptfilen uppgift1. Projektuppgiften Fettlösliga fenoler	
Vecka 6	Studio 6 - Dubbelintegral	
Vecka 7	Studio 7 - Kurvor, fält och ytor. Skriptfilen myran	
Vecka 8		

- Övrigt kompletterande material nås också via kurshemsidan.

Studioövningarna och Maple TA

Studiomaterialet är av samma typ som ni haft tidigare, men examinationen av studioövningarna kommer istället ske genom det web-baserade systemet Maple TA.

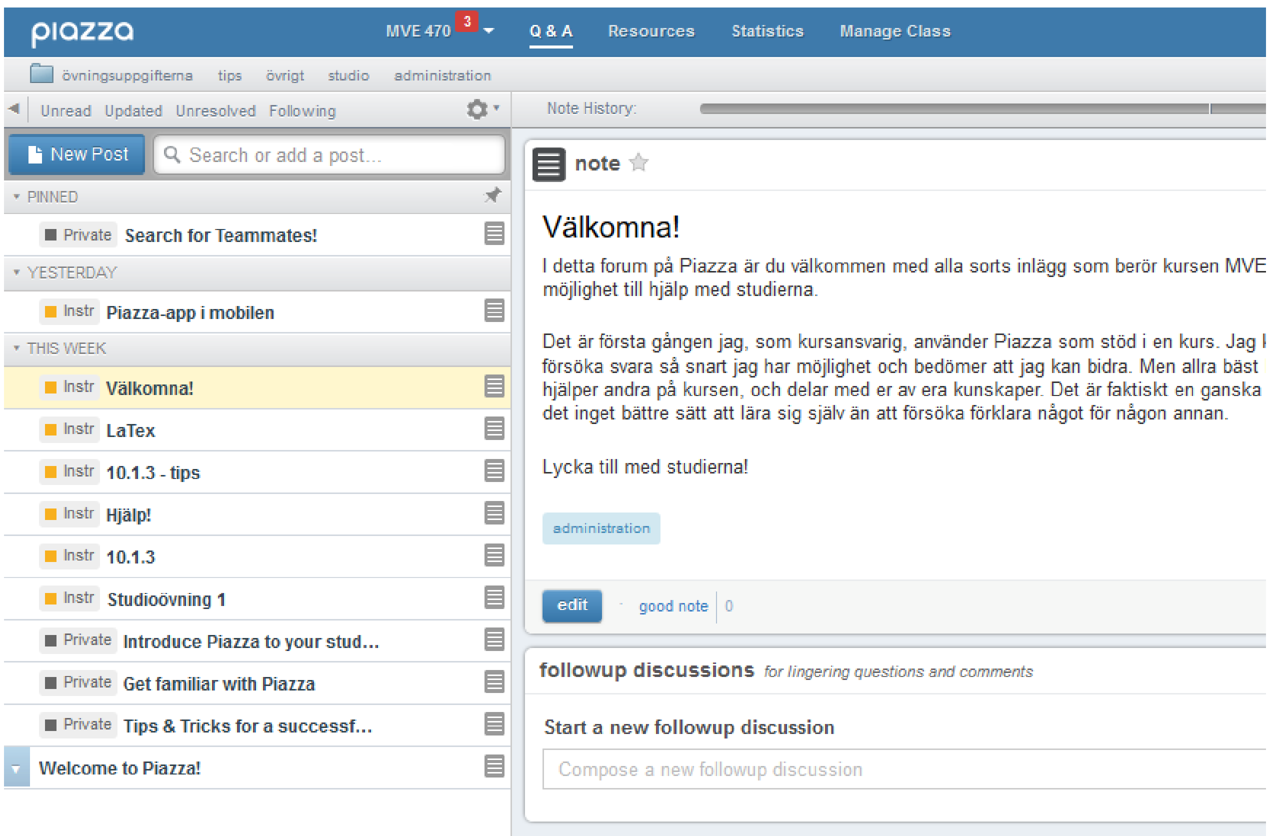
Uppgifterna i Maple TA nås via kursaktiviteten i Ping Pong.



Piazza

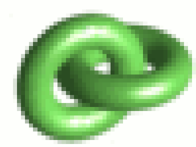
Alla som är registrerade vid kursstart får en inbjudan (via epost) att delta i kursens forum på web-portalen Piazza - ett forum för att ställa frågor och hjälpa varandra.

Ni med sen registrering får skicka ett brev till mig så lägger jag till er i Piazza-aktiviteten.



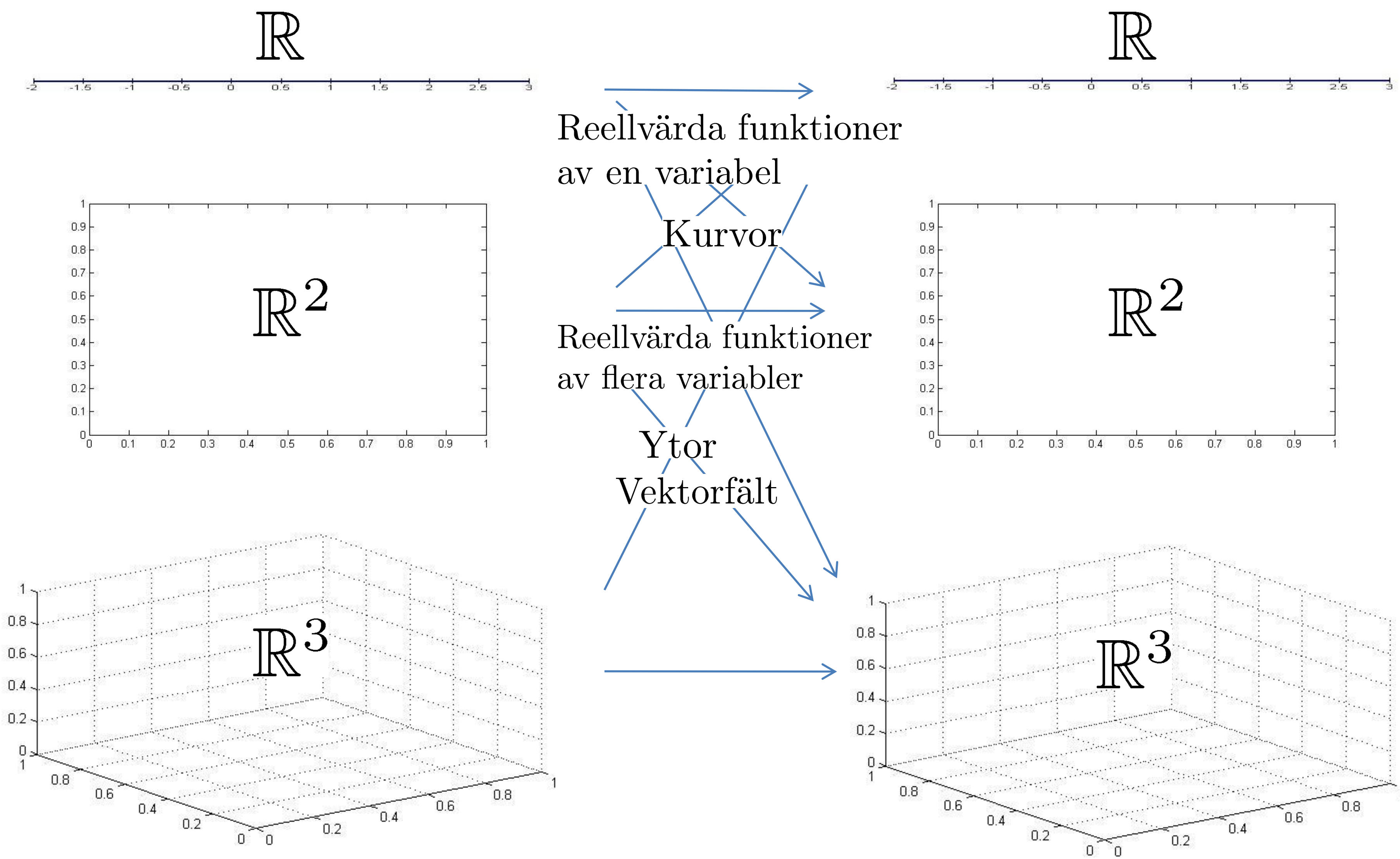
Flervariabelanalys för K/Kf/Bt

läsåret 2017/18



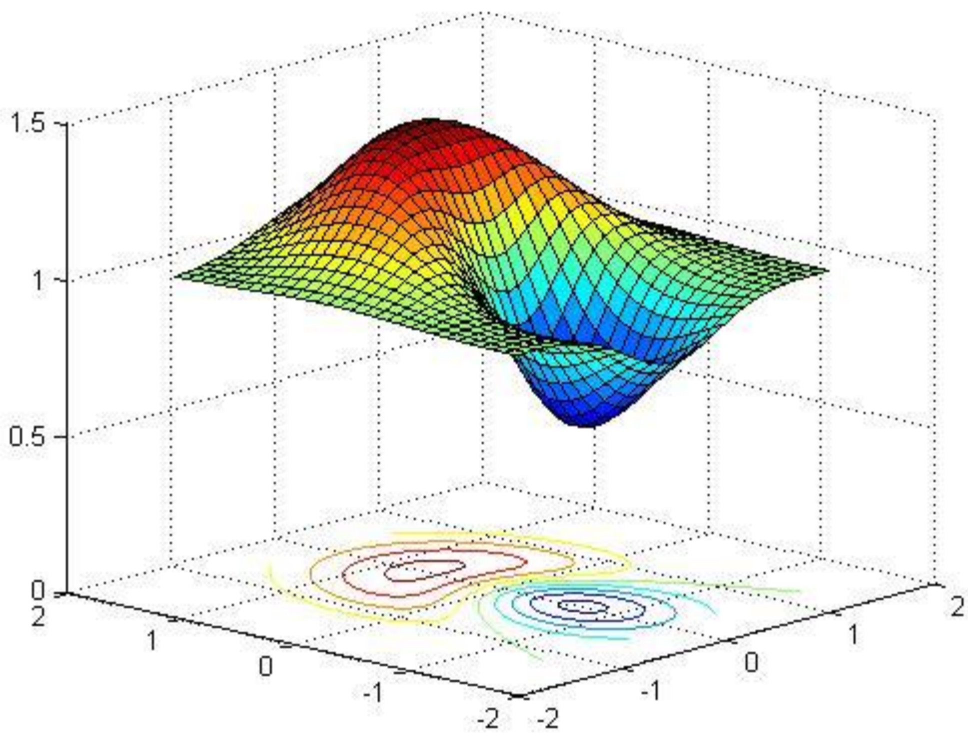
Exempel på innehåll

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$



Funktioner av flera variabler

$$f(x,y) = 1 + (x^2 + y)e^{-2x^2 - y^2}$$

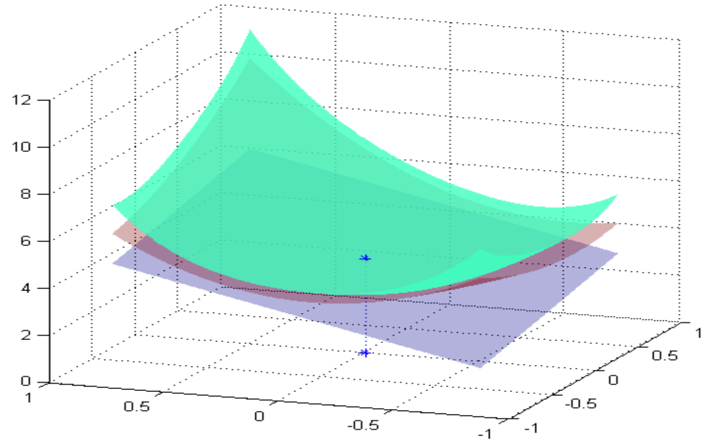


Partiella derivator

Kedjeregeln: $$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

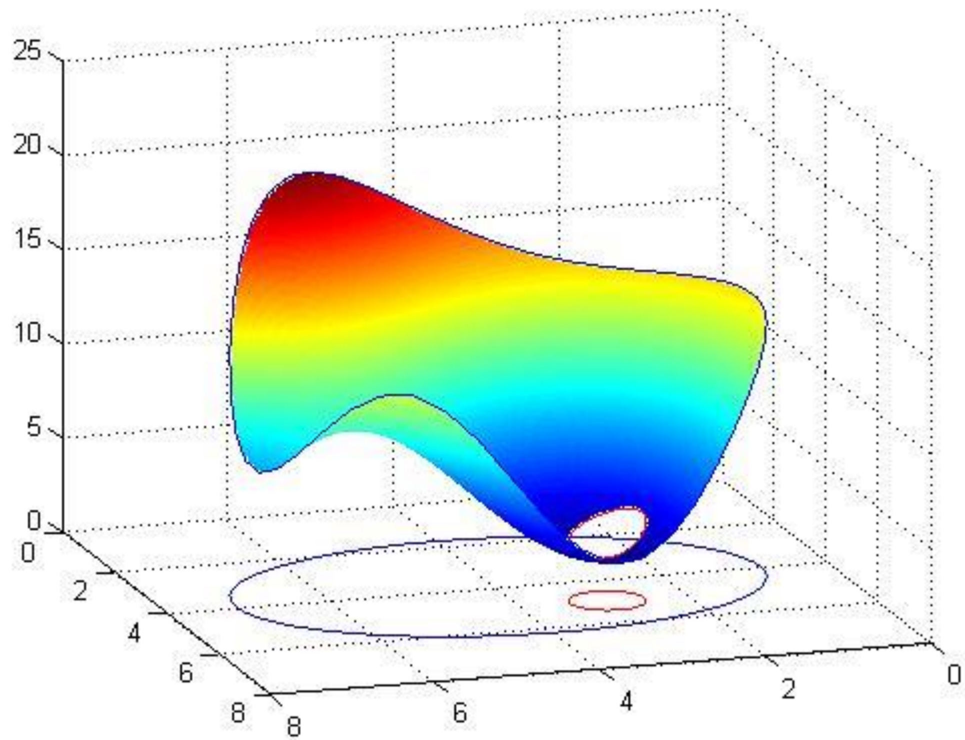
Taylors formel:

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \ldots$$



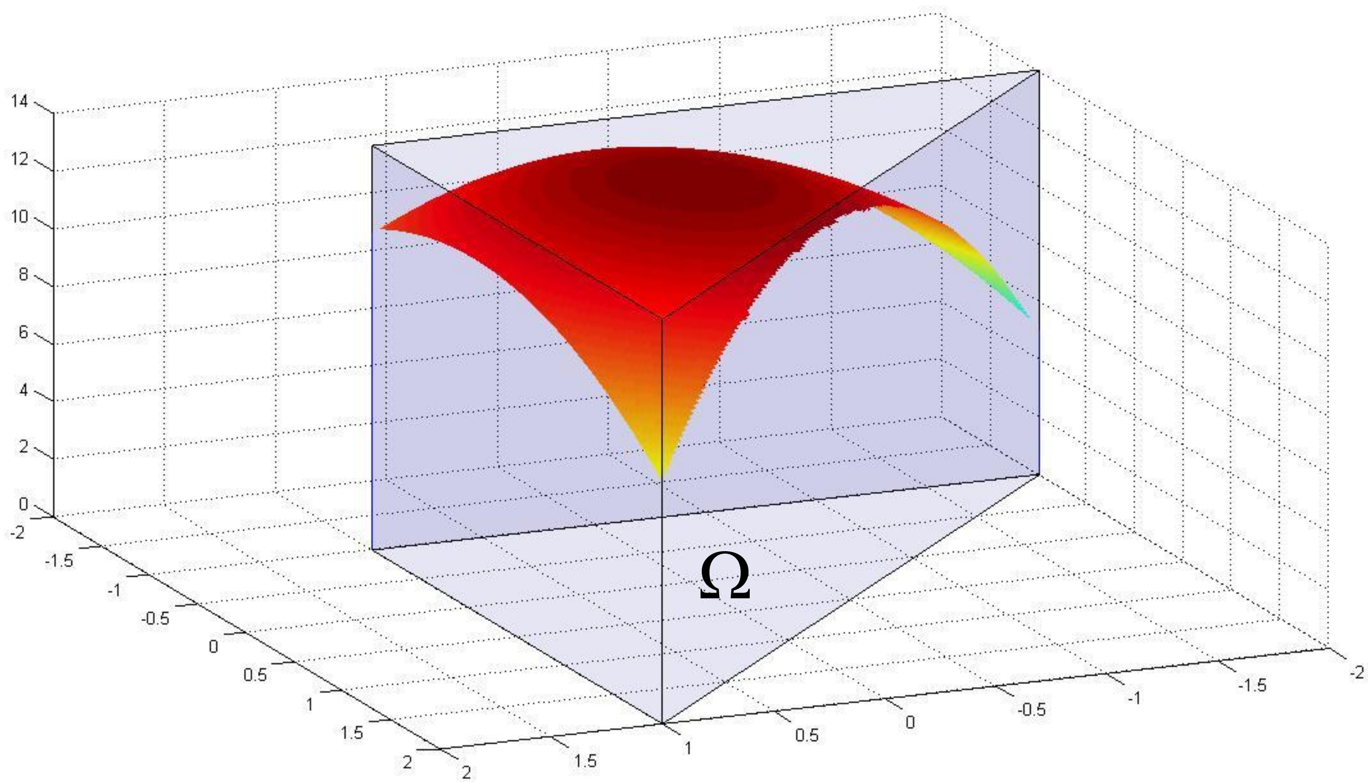
Optimering

$$\min_{g(x,y)=0} f(x,y)$$



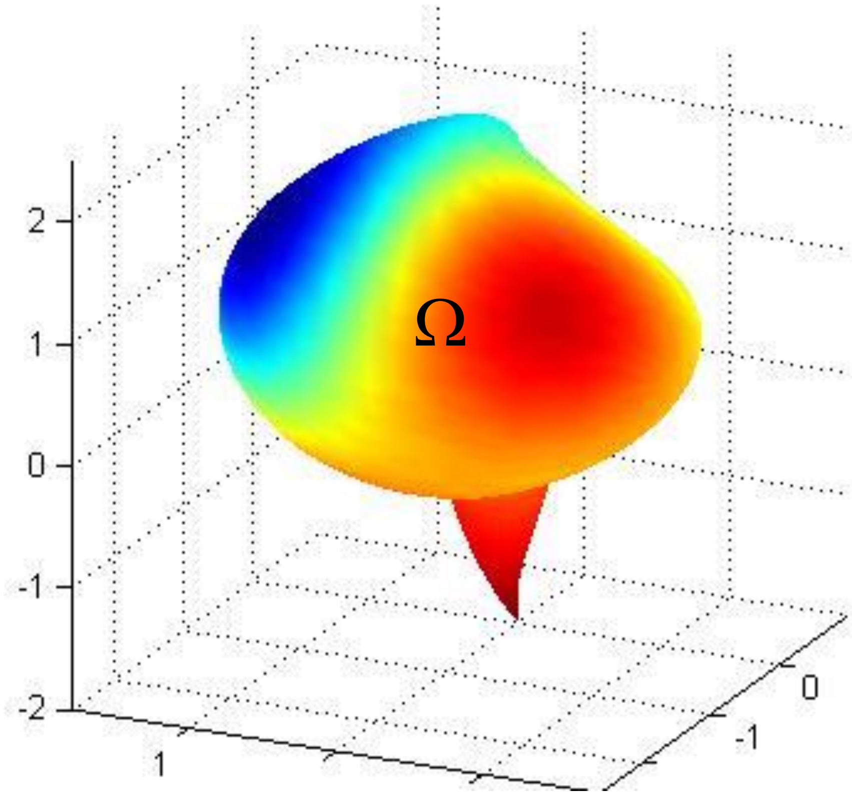
Dubbelintegraler

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$$



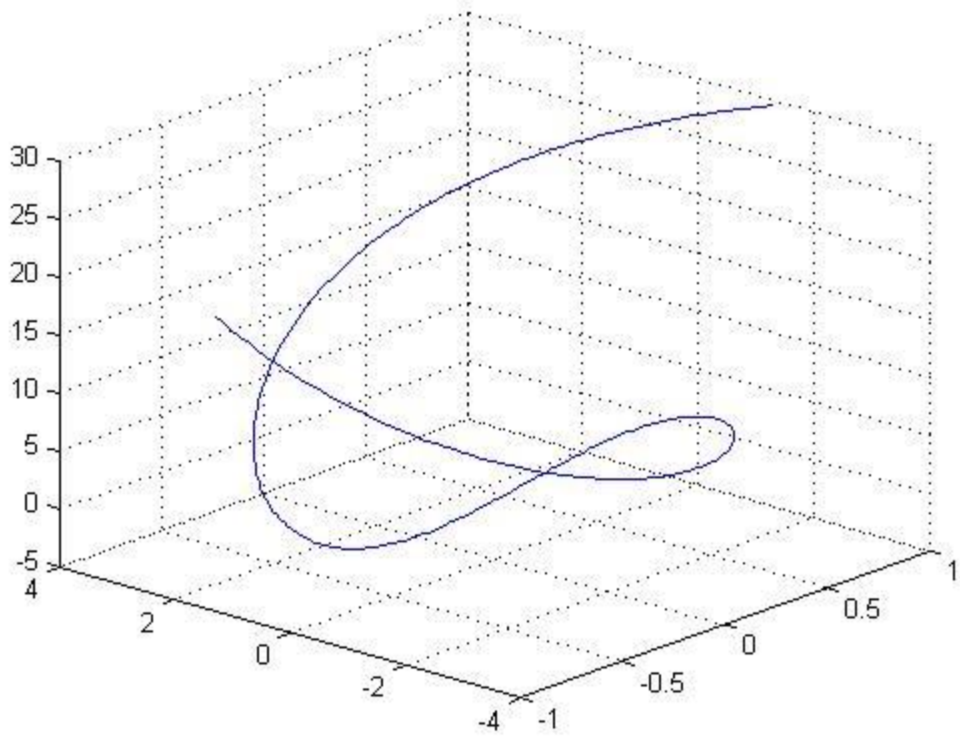
Trippelintegraler

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz$$

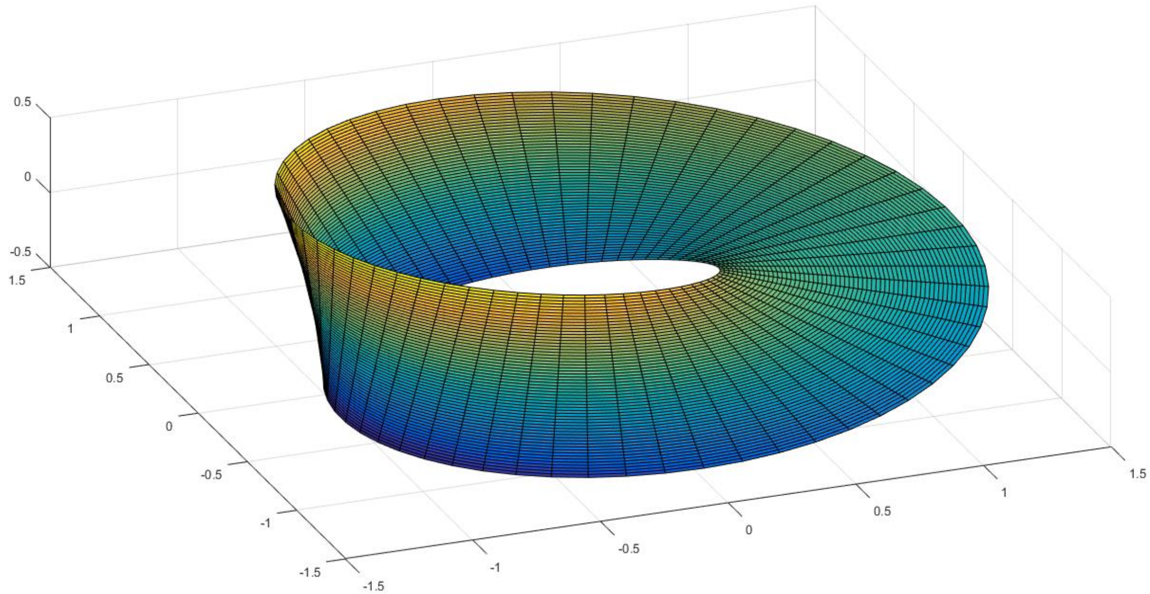


Kurvor i planet och rummet

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = t\cos t \\ z = t^2 - t \end{cases}$$



Ytor



$$\begin{cases} x = (1 + v\cos(u/2)/2)\cos(u) \\ y = (1 + v\cos(u/2)/2)\sin(u) \\ z = v\sin(u/2)/2 \end{cases}$$

Kurvintegraler

längd

massa

tyngdpunkt

$$\int_\gamma f(x,y,z)\,ds$$

arbete

$$\int_\gamma \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{T}}\,ds$$

Ytintegraler

area

massa

tyngdpunkt

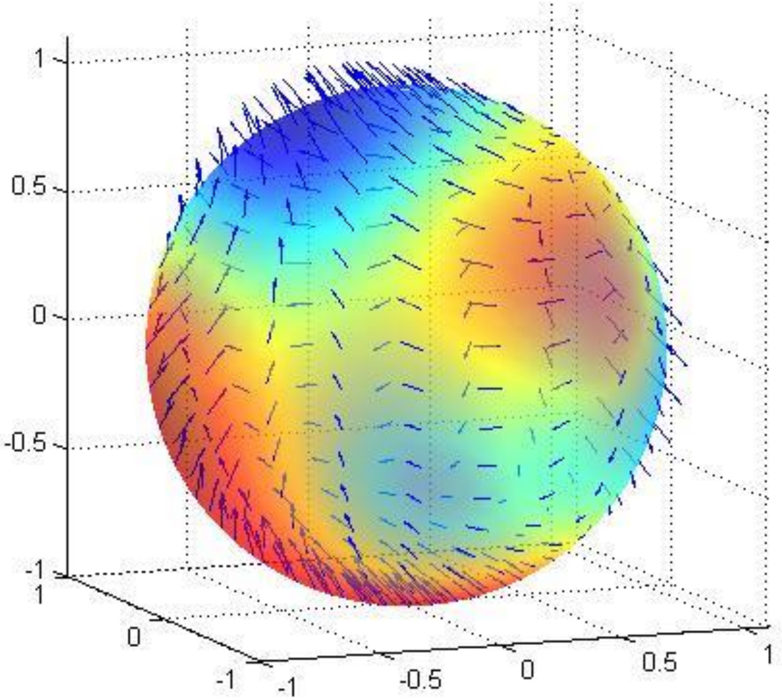
$$\iint_S f(x,y,z)\,dS$$

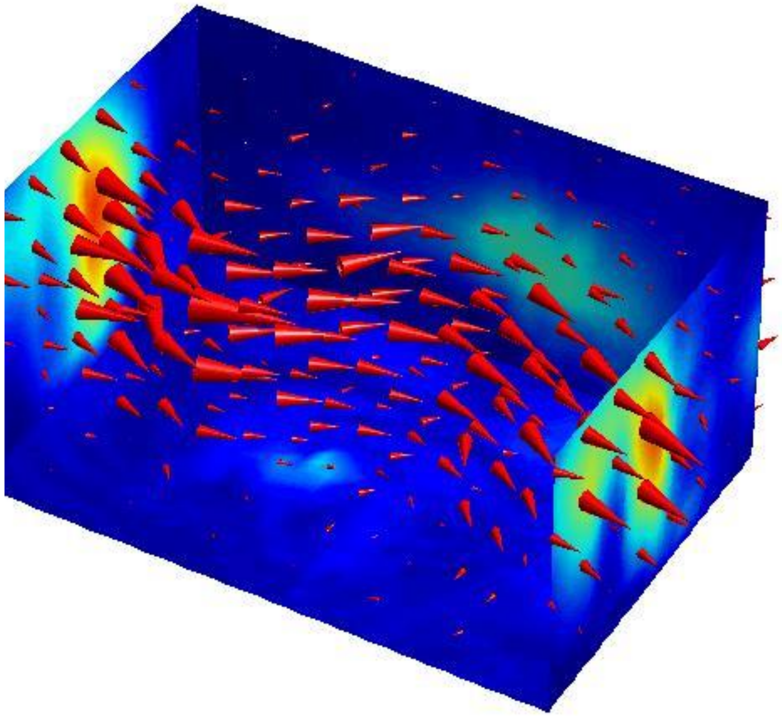
flöde

$$\iint_S \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS$$

Vektorfält och flöden

$$\mathbf{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\mathbf{i} + F_2(x,y,z)\mathbf{j} + F_3(x,y,z)\mathbf{k}$$

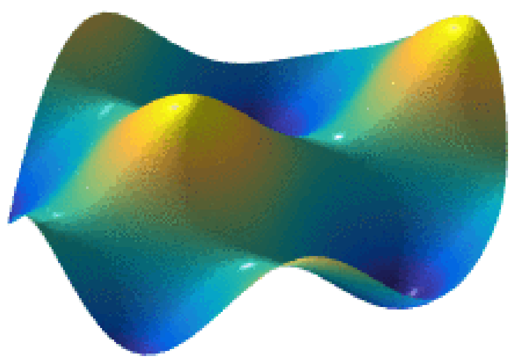




Partiella differentialekvationer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f(x, y, t) = \sin 3x \cos 4y \sin 5t + \sin\left(5(x+t)\right) + \cos\left(5(y+t)\right)$$



Mer om detta i kommande mattekurser