Vektoranalys

Kap 16

Avs. 16.1

Divergensen av ett vektorfält $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$:

$$\mathbf{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \qquad (= \nabla \bullet \mathbf{F})$$

Obs! **div F** är ett tal
och **curl F** är en vektor.

$$\boxed{\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}}$$

Rotationen av ett vektorfält $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$:

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\left(= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{F} \right)$$

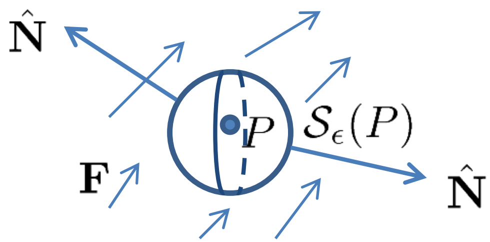
Divergensen av ett plant vektorfält $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$:

$$\mathbf{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

Rotationen av ett plant vektorfält $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$:

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

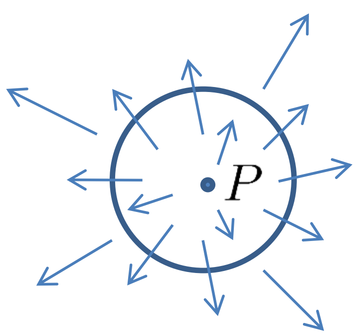
Sats 1 (sid 890) : $$\mathbf{div}\mathbf{F}(P) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\epsilon^3} \underbrace{\iint_{\mathcal{S}_\epsilon(P)} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS}_{\text{flödet ut genom } \mathcal{S}_\epsilon(P)}$$

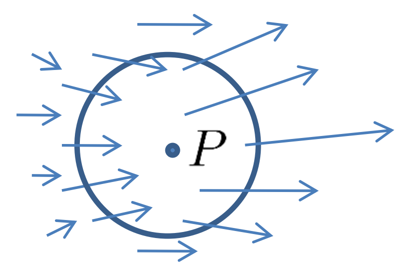


sfär med centrum i P och med radie ϵ

Detta är en följd av Gauss's divergenssats i avs. 16.4
men bevisas även separat i avs. 16.1.

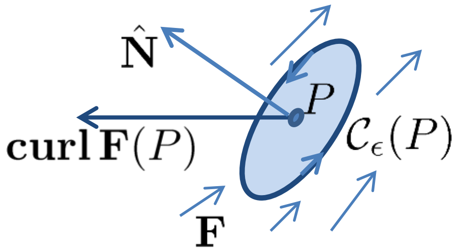
Om $\mathbf{F}$ representerar en stationär strömning (dvs. tidsoberoende)
så ger divergensen $\mathbf{div}\,\mathbf{F}(P)$ således ett mått på hur mycket av det
strömmande mediet som per volymsenhet flödar ut från (eller in mot) P
dvs. hur mycket av mediet som produceras (eller konsumeras) i punkten P





Här är $\mathbf{div}\,\mathbf{F}(P)$ stort

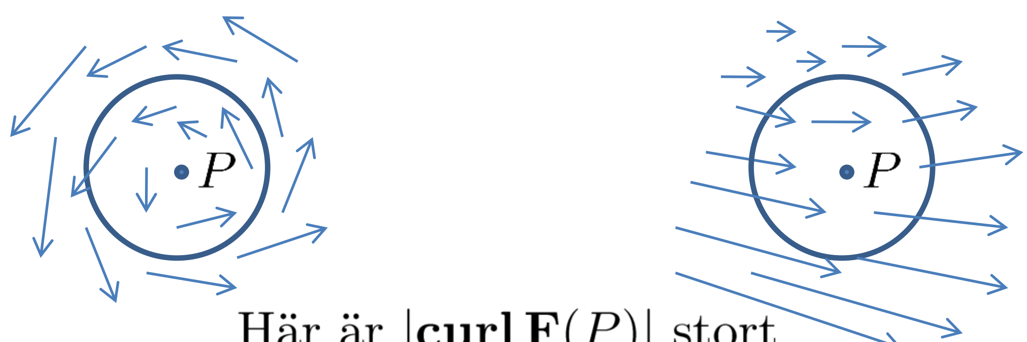
Sats 2 (sid 895) $\quad (\mathbf{curl}\,\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}})(P) = \displaystyle\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \underbrace{\oint_{\mathcal{C}_\epsilon(P)} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}}_{\text{Arbetet runt } \mathcal{C}_\epsilon(P)}$



randkurvan till cirkelskivan med centrum i P, radie ϵ och normalvektor $\hat{\mathbf{N}}$

Detta är en följd av Stoke's sats i avs. 16.5
men bevisas även separat i avs. 16.1.

Det framgår av ovan att arbetet är som störst då cirkelskivans normalriktning sammanfaller med $\mathbf{curl}\,\mathbf{F}(P)$ dvs cirkulationen kring P är som störst runt den axel som $\mathbf{curl}\,\mathbf{F}(P)$ spänner upp. Vidare följer det att $|\mathbf{curl}\,\mathbf{F}(P)|$ är ett mått på denna maximala cirkulation. Så rotationen uttrycker hur mycket fältet tenderar att virvla i punkten och riktningen på rotationsvektorn indikerar den axel kring vilket rotationen är som störst.



Här är $|\mathbf{curl}\,\mathbf{F}(P)|$ stort

Avs. 16.2

Ett vektorfält $\mathbf{F}$ sägs vara *källfritt* i ett område D om

$$\mathbf{div}\,\mathbf{F} = 0 \text{ för alla punkter i } D.$$

Vektorfältet sägs vara *virvelfritt* i D om

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \mathbf{0} \text{ för alla punkter i } D.$$

Sats 3 (sid 897):

kallas *Laplaceoperatorn* och betecknas även med ∇^2 eller mer vanligen Δ så $\nabla\bullet\nabla = \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$
\begin{cases}
\qquad \cdots & \\
(g) \quad \nabla\bullet(\nabla \times \mathbf{F}) = 0 & \\
(h) \quad \nabla \times \nabla\phi = \mathbf{0} & \\
(i) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla\bullet\mathbf{F}) - \overbrace{\nabla\bullet\nabla}\mathbf{F} &
\end{cases}
$$

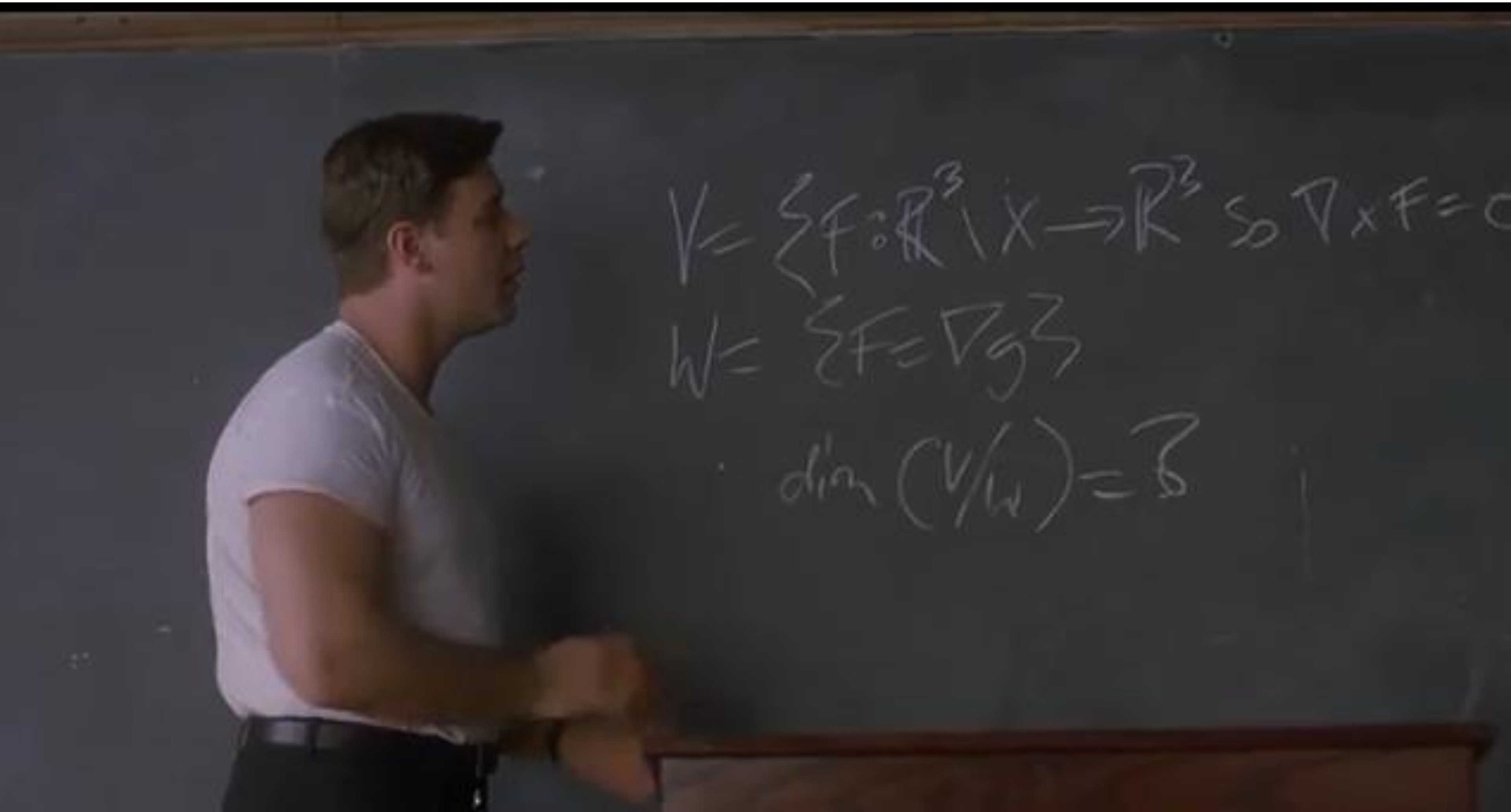
Det följer av (g) att om $\mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{F}$ för något vektorfält $\mathbf{F}$ så är $\mathbf{G}$ källfritt

och av (h) följer det att om $\mathbf{F} = \nabla\phi$ för någon funktion ϕ (dvs om $\mathbf{F}$ är konservativt) så är $\mathbf{F}$ virvelfritt.

Sats 4 (sid 899): Om $\mathbf{F}$ är ett glatt virvelfritt vektorfält på ett enkelt sammanhängande område D så är $\mathbf{F}$ konservativt.

För Hollywood versionen av satsen, kolla in klassrum scenen i filmen "A Beautiful Mind": https://www.youtube.com/watch?v=ZGGZaQQEniw

Scenen är mellan 30-32 minuter in i videon. I Russell Crowes notation, Sats 16.2.4 säger att dim(V/W) = 0 om R^3 \ X är enkelt sammanhängande



Vi säger i denna kurs att ...

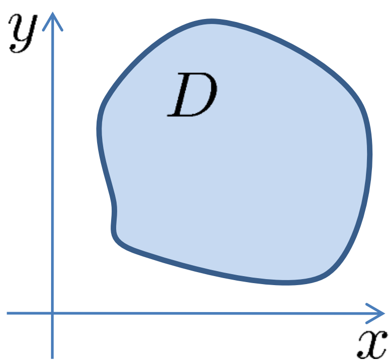
en funktion är *glatt* (smooth) om alla dess partiella derivator av högre ordning är kontinuerliga.

ett vektorvärd funktion är *glatt* om dess komponentfunktioner är glatta.

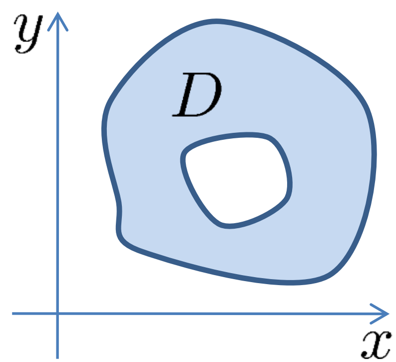
en kurva eller yta är *glatt* om den kan parametriseras med någon glatt vektorvärd funktion.

Anm. Begreppet glatt definieras lite olika i olika böcker. Begreppet används i satser och argument som en försäkran om att ingående funktioner är ”tillräckligt reguljära” dvs. att de går att derivera så många gånger som behövs och att derivatorna är kontinuerliga och ”snälla”. Ovanstående definitioner är inte desamma som i boken men duger bra för våra ändamål.

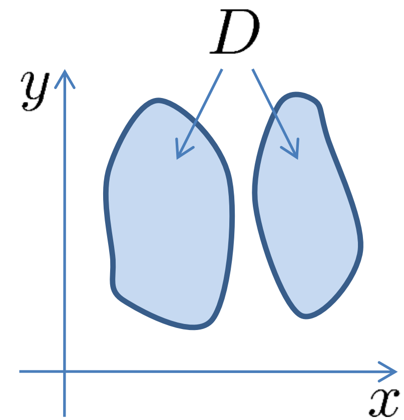
Ett område D sägs vara *enkelt sammanhängande* om varje enkel sluten kurva kan "dras ihop kontinuerligt" till en punkt i D utan att någon gång innehålla punkter utanför D



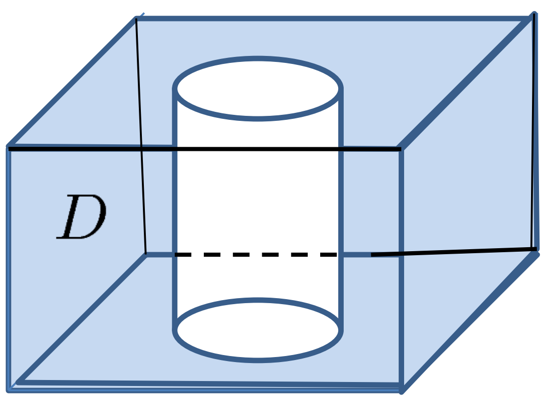
Enkelt sammanhängande



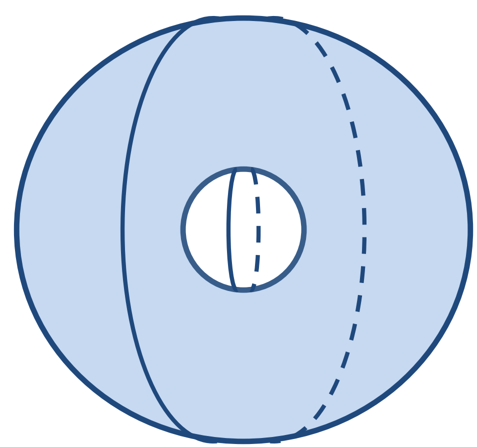
Sammanhängande men
ej enkelt sammanhängande



Ej sammanhängande



Sammanhängande men
ej enkelt sammanhängande

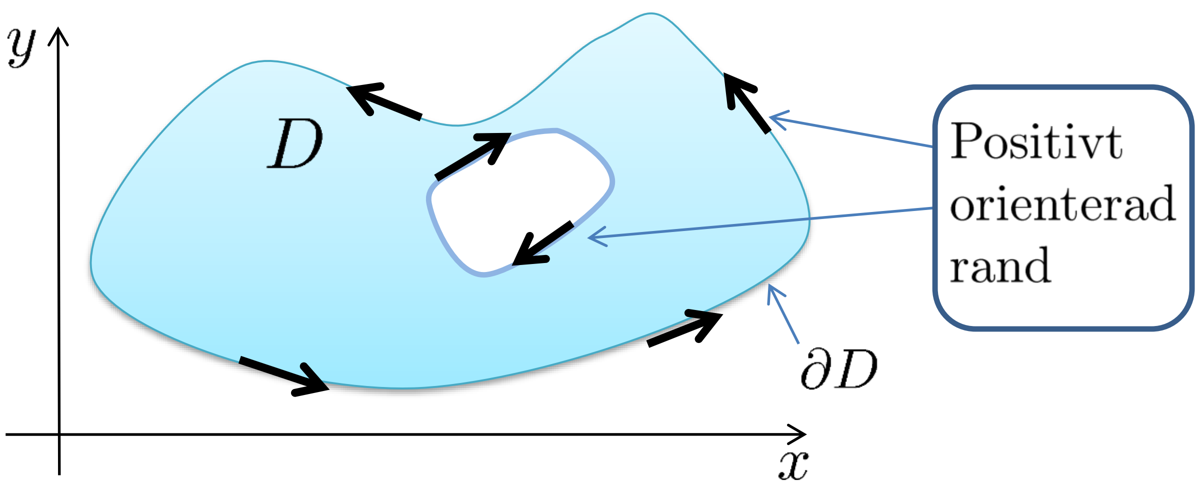


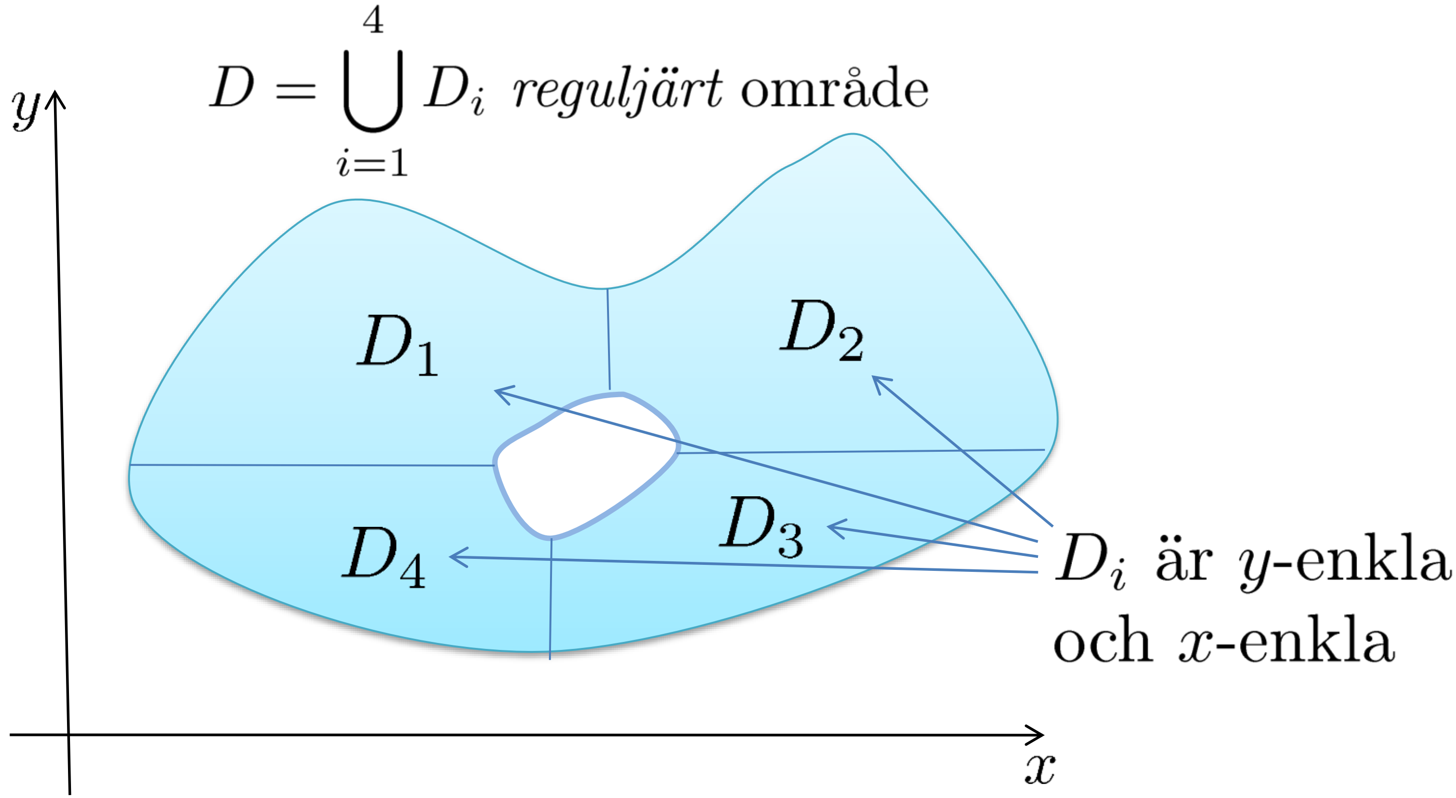
Enkelt sammanhängande

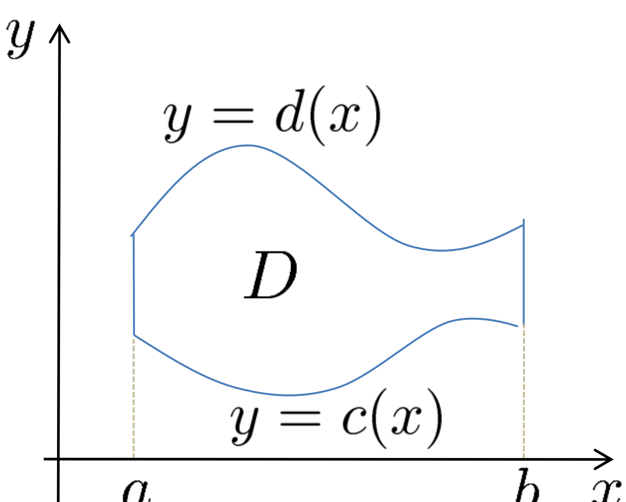
Greens sats (avs.16.3)

Låt D vara ett reguljärt och slutet område i planet vars rand ∂D består av en eller flera styckvis glatta kurvor som är positivt orienterade m.a.p. D.
Om $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$ är ett glatt vektorfält på D så är

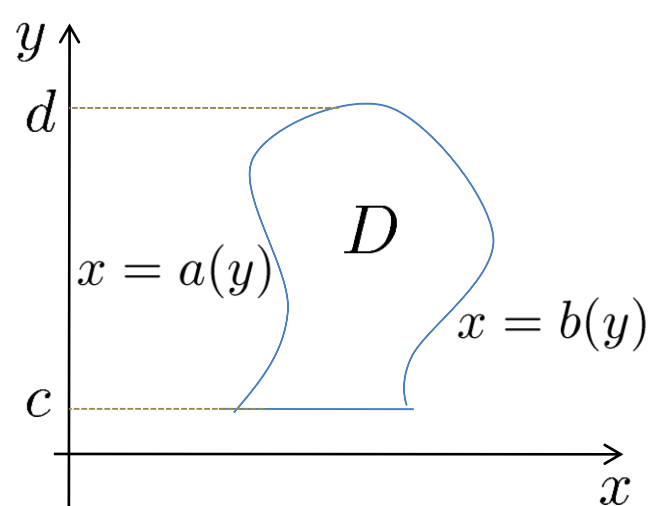
$$\oint_{\partial D} F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy$$







y-enkelt

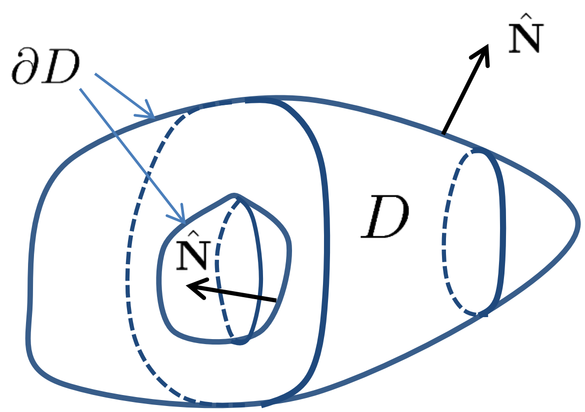


x-enkelt

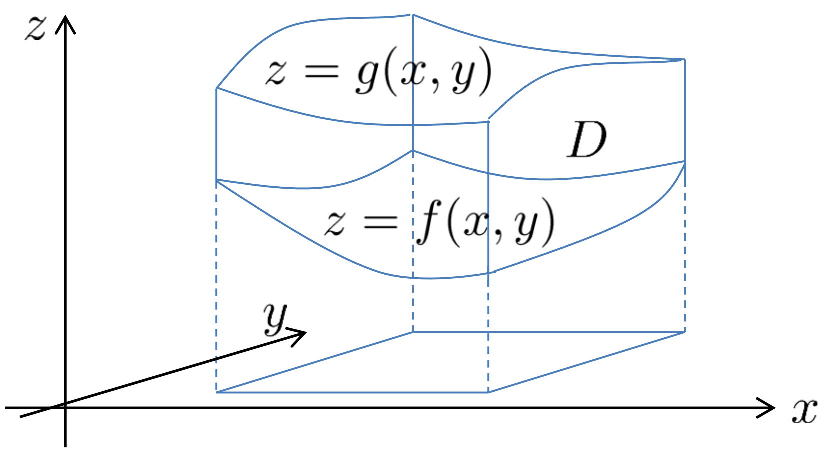
Gauss's divergenssats (avs.16.4)

Låt D vara ett reguljärt område i rummet vars rand ∂D består av en eller flera styckvis glatta ytor som är orienterade med utåtriktad normalvektor $\hat{\mathbf{N}}(x, y, z)$.
Om $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ är ett glatt vektorfält på D så är

$$\iint_{\partial D} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_{D} \mathbf{div}\,(\mathbf{F})\, dV$$

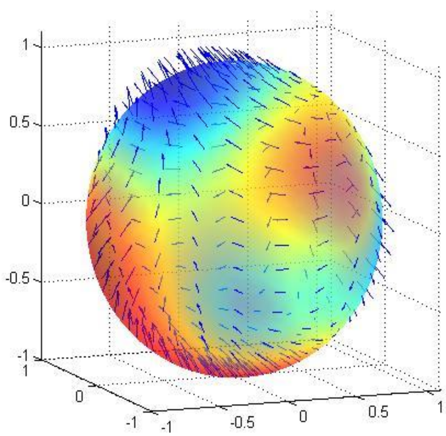


På liknande vis som för områden i planet är ett område i rummet *reguljärt* om det kan delas upp i ändligt många delar som vart och ett är x-enkla, y-enkla och z-enkla.

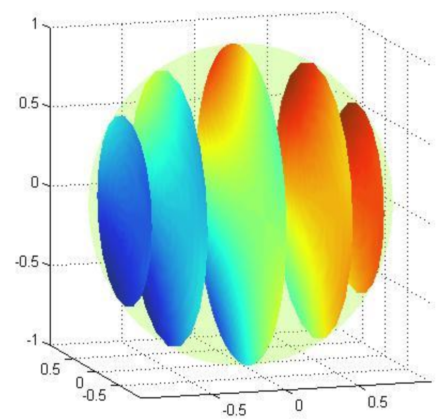


z*-enkelt*

$$\iint_{\partial D} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} \, dS = \iiint_{D} \mathbf{div}\, \mathbf{F} \, dV$$



Flödet ut ur området



Produktionen i området

medelvärdesegenskapen för trippelintegraler

$$\mathbf{divF}(P) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\text{Volymen av } B_\epsilon(P)} \iiint\limits_{B_\epsilon(P)} \mathbf{div\,F}\,dV$$

klot med centrum i P och med radie ϵ

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\epsilon^3} \underbrace{\iint\limits_{\partial B_\epsilon(P)} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS}_{\text{flödet ut ur } B_\epsilon(P)}$$

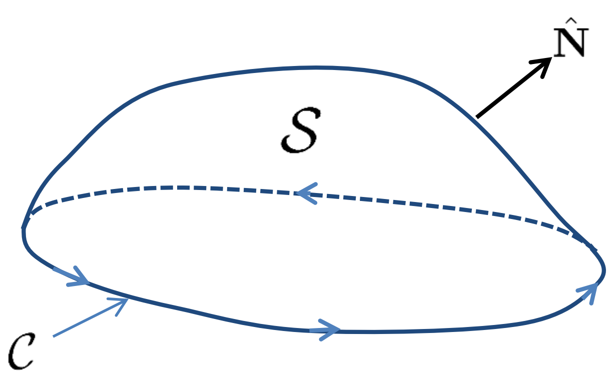
Gauss's divergenssats

Detta visar Sats 1 i avs.16.1 och motiverar tolkningen av **div F** som mått på källproduktion.

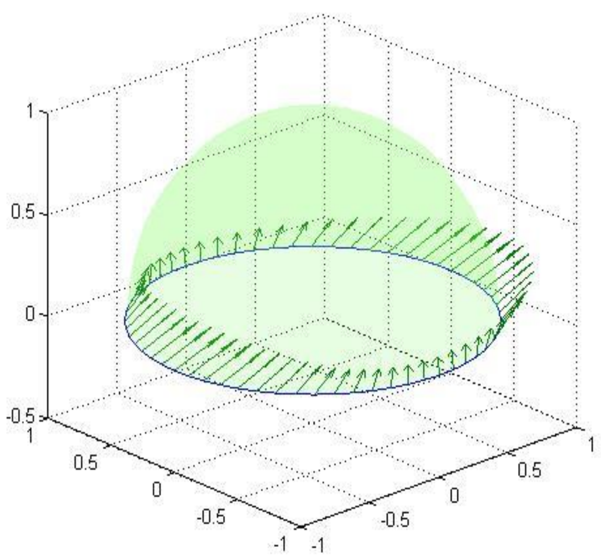
Stokes's sats (avs.16.5)

Låt $\mathcal{S}$ vara en styckvis glatt yta som är orienterad med normalvektor $\hat{\mathbf{N}}(x, y, z)$ som är sådan att dess kant $\mathcal{C}$ består av en eller flera styckvis glatta och slutna kurvor med positiv orientering m.a.p. ytans orientering.
Om $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ är ett glatt vektorfält i ett område som omfattar $\mathcal{S}$ så är

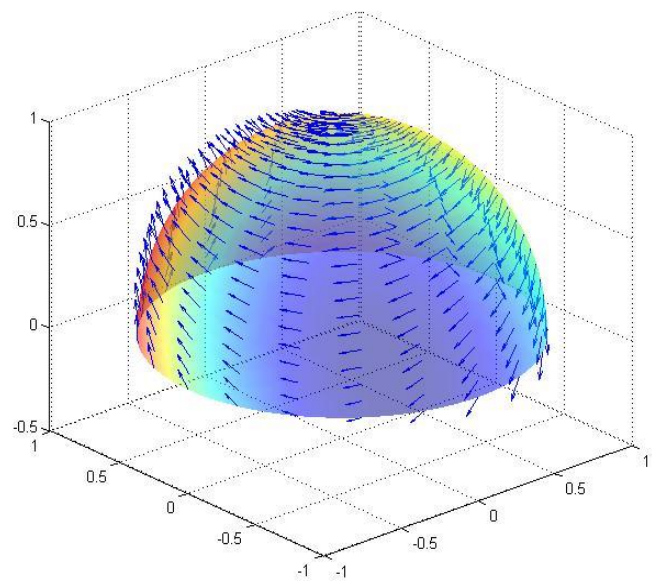
$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{curl}\,\mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$



$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{curl}\,\mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$$



Arbetet längs kantkurvan



Rotationen på ytan

medelvärdesegenskap

$$(\mathbf{curl\,F}\cdot\hat{\mathbf{N}})(P) = \lim_{\epsilon\to0^+}\frac{1}{\text{Arean av } \mathcal{S}_\epsilon(P)}\iint_{\mathcal{S}_\epsilon(P)} \mathbf{curl\,F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS$$

cirkelskiva med centrum i P, radie ϵ och med normalvektor $\hat{\mathbf{N}}$

$$= \lim_{\epsilon\to0^+}\frac{1}{\pi\epsilon^2}\underbrace{\oint_{\mathcal{C}_\epsilon(P)}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}}_{\text{Arbetet runt } \mathcal{C}_\epsilon(P)}$$

Stoke's sats

Detta visar Sats 2 i avs.16.1 och motiverar tolkningen av **curl F** som mått på vektorfältets tendens att virvla.