

Flervariabelanalys - Träningstenta

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 08/09 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.** (14p)

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.** Motivera och förklara så väl du kan.

2. (a) Skissa i xy -planet på den kurva \mathcal{C} som ges av parametriseringen (1p)

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^2 - 1 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

- (b) Visa att vektorfältet $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (x + 1)\mathbf{j}$ är konservativt i \mathbb{R}^2 och bestäm en potential till \mathbf{F} (3p)

- (c) Beräkna det arbete $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ som kraftfältet \mathbf{F} i deluppgift (b) utför på en partikel som rör sig längs kurvan i deluppgift (a) från $(1, -1)$ till $(2, 0)$ (2p)

3. (a) Vilken typ av andragsyta beskrivs av parametriseringen (1p)

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = r^2 \end{cases}, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

- (b) Avgör om hastighetsfältet $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$ är virvelfritt och/eller källfritt i \mathbb{R}^3 (2p)

- (c) Beräkna flödet $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$ av hastighetsfältet i deluppgift (b) nedåt (dvs. i negativ z -led) genom den del \mathcal{S} av ytan i deluppgift (a) där $0 \leq r \leq 1$ (3p)

4. Finn och klassificera de kritiska punkterna till funktionen $f(x, y) = xy e^{-(x^2 + y^2)/2}$ (6p)

Del 2: Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösninggång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Visa att ekvationen $\cos(x - y + z) = y \ln x + z$ implicit definierar en funktion $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten $(1, 2, 1)$. Bestäm sedan Taylorpolynomet av första ordningen till $f(x, y)$ i punkten $(1, 2)$. (6p)

6. Avgör om följande ekvationssystem har någon lösning; (6p)

$$\begin{cases} x^3 + 3x + y^3 + 3y = 4 \\ 2x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

(Tips: undersök största och minsta värde av funktionen $x^3 + 3x + y^3 + 3y$ under bivillkoret $2x^2 + 2y^2 = 1$)

7. Visa att följande identiteter gäller för alla glatta vektorfält $\mathbf{F} = \mathbf{i}F_1 + \mathbf{j}F_2 + \mathbf{k}F_3$ och funktioner $\phi(x, y, z)$ (som vanligt är ∇ nablaoperatoren $\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ och symbolerna \cdot och \times betecknar skalärprodukt resp. vektorprodukt). (6p)

(a) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

(b) $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$

Anonym kod	Flervariabelanalys - Träningstenta ...	sid.nummer 1	Poäng
------------	---	------------------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) Bestäm gradienten till funktionen $f(x, y) = xy^2$ i punkten $\mathbf{p} = (2, 5)$. Bestäm också riktningsderivatan av funktionen f i punkten \mathbf{p} och i riktningen $\mathbf{v} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$. (2p)

Lösning:

Svar:

- (b) Uttryck $\frac{\partial}{\partial x} f(2x + y, xy)$ och $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(2x + y, xy)$ i de partiella derivatorna av f (3p)

Lösning:

Svar:

- (c) Bestäm differentialen df av funktionen $f(x, y) = \sin(2x - y)$ i punkten $(1, 2)$ och använd differentialen för att beräkna $f(1.1, 1.9)$ approximativt. (3p)

Lösning:

Svar:

- (d) Beräkna den generaliserade dubbelintegralen $\iint_T \frac{y}{\sqrt{x}} dx dy$, där T är triangelområdet med hörn i $(0, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 1)$. (3p)

Lösning:

Svar:

- (e) Beräkna volymen av området Ω som beskrivas av olikheterna $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ och $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, genom att beräkna $\iiint_{\Omega} dx dy dz$ med hjälp av sfärisk substitution. (3p)

Lösning:

Formelblad för TMA043 och MVE085 08/09

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos 2x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin 2x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = I_n$$

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + x^{n+1}B(x) \quad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + x^{n+1}B(x) \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + x^{2n+1}B(x) \quad |x| \leq 1$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\dots 1} \quad \binom{\alpha}{0} = 1$$

Övrigt

Tyngdpunkten (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x,y,z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x,y,z) dx dy dz}$, analogt för y_T, z_T .