# Typiska förkunskaper inför kursen i flervariabelanalys

Nedan finns listat några av de viktigare förkunskaperna inför kursen i flervariabelanalys. Det mesta bör ni ha tränat på i tidigare kurser på Chalmers eller i gymnasiet. En del saker kan dock ha fallit i glömska. Kunskapsluckorna bör dock inte vara värre än att en kort repetition gör att ni snabbt återfår kunskaperna, åtminstone tillräckligt för vad som behövs i denna kurs. Om testuppgifterna nedan upplevs svåra så försök inte fastna utan lägg fokus på att följa flervariabelkursen. Mycket av det som står listat nedan kommer vi inte behöva omedelbart i flervariabelkursen så du kan repetera vid behov i takt med att kursen framskrider. Syftet med denna lista med förkunskaper är att vara tydlig med vad vi anser vara förkunskap till kursen. Förkunskaperna kan behövas för att lösa övningsuppgifter och tentamensuppgifter eller för att följa med i kalkyler på föreläsningarna.

**1.** Du skall kunna skissa parabler, ellipser och hyperbler i planet (se t.ex. avs. P.3 & 8.1 i Adams).

**Testa dig själv:**

Skissa de andragradskurvor som beskrivs av följande ekvationer;

**a)** $x^2 + 2y = 0$

**b)** $2x^2 + y^2 = 4$

**c)** $x^2 - 2y^2 = 1$

**d)** $3x^2 + 4y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$

**e)** $4x^2 - y^2 = 2x - 5$

**f)** $6x - 2y^2 + y = 1$

**2.** Du skall kunna beräkna skalärprodukt och vektorprodukt, samt känna till och använda deras egenskaper (se t.ex. avs. 10.2 & 10.3 i Adams och avs. 6.1 i Lay).

Obs! vektorer skrivs på lite olika sätt beroende på sammanhang. Ibland används skrivsättet $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ (kommer vara vanligt i denna kurs) och ibland identifieras den med motsvarande kolonnvektor $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ (vilket är vanligt i en linjär algebra kurs). I följande uppgifter kommer vi dock använda det lite kortare skrivsättet $(x, y, z)$.

**Testa dig själv:**

**a)** För vilka vektorer är skalärprodukten definierad och hur betecknas den?

**b)** För vilka vektorer är vektorprodukten definierad och hur betcknas den?

**c)** Beräkna skalärprodukten och vektorprodukten av vektorerna $\mathbf{u} = (2, -3, 0)$ och $\mathbf{v} = (1, 5, 2)$

**d)** Bestäm en vektor i $\mathbb{R}^3$ som har längden 1 och som är vinkelrät mot vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i deluppgift c)

**e)** En partikel förflyttar sig rätlinjigt från (1, 2, -1) till (3, 0, 4) i $\mathbb{R}^3$ och påverkas hela vägen av kraften $F = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 1\mathbf{k}$. Beräkna kraftens arbete vid förflyttningen.

**f)** Använd vektorprodukt för att beräkna arean av det parallellogram i $xy$-planet som har hörn i $(1, 2), (3, 1), (2, -2), (0, -1)$

(anm. i detta fall är det enkelt att beräkna arean även på annat sätt)

**3.** Du skall kunna beskriva och skissa plan och linjer (se t.ex. avs. 10.4 i Adams och avs. 1.3 & 1.5 i Lay).

**Testa dig själv:**

**a)** Skissa linjen $x + 2y = 3$ i planet och beskriv linjen på parameterform dvs bestäm en punkt $\mathbf{p}$ och en vektor $\mathbf{v}$ sådana att $\mathbf{r} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ genomlöper alla punkter $\mathbf{r} = (x, y)$ på linjen för $-\infty < t < \infty$.

**b)** Beskriv linjen $x + 1 = 2y - 1 = 2 - 3z$ i $\mathbb{R}^3$ på parameterform.

**c)** Bestäm på parameterfri form (dvs ekvationer i $x, y, z$ utan någon parameter, som i b)) den linje som går genom punkten $(1, 0, -2)$ och har $(2, 1, -1)$ som riktningsvektor.

**d)** Beskriv planet $x - 3y + 2z = 3$ på parameterform dvs. bestäm en punkt $\mathbf{p}$ och två vektorer $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ sådana att $\mathbf{r} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2$ beskriver alla punkter $\mathbf{r} = (x, y, z)$ i planet för $-\infty < t, s < \infty$

**e)** Bestäm en ekvation för det plan som går genom punkten $(1, -3, 2)$ och har $(2, 1, -1)$ som normalvektor.

**f)** Bestäm skärningspunkten mellan linjen i deluppgift b) och planet i deluppgift d).

4. Du skall kunna derivera funktioner av en variabel. Bl.a. skall du kunna derivera m.h.a. produktregeln, kvotregeln och kedjeregeln (se t.ex. avs. 2.2-2.6 i Adams).

**Testa dig själv:**

Beräkna följande derivator;

**a)** $f'(x)$ då $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2}$

**b)** $f'(1)$ då $f(t) = t \arctan t$

**c)** $\dfrac{d}{dt}\left(\ln|t+t^2|\right)$

**d)** $\dfrac{d^2g}{dx^2}$ då $g(x) = e^{\sin x}$

**e)** $h''(0)$ då $h(y) = \sqrt{1+y^2}$

**f)** $f'(x)$ då $f(x) = xe^{x+p}\ln(px)$
($p$ är en parameter)

5. Du skall kunna integrera funktioner av en variabel. Du skall känna till vad som menas med bestämd, obestämd och generaliserad integral, samt kunna beräkna sådana m.h.a. bl.a. partiell integration och variabelsubstitution. Du skall också känna till hur man integrerar rationella funktioner (se t.ex. avs. 5.6, 6.1-6.2, 6.5 i Adams).

**Testa dig själv:**

Beräkna följande integraler

**a)** $\displaystyle\int_0^2 t(1+t)^9\,dt$

**b)** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x+1}{x^2(x-1)}\,dx$

**c)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

**d)** $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$

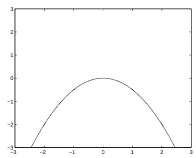
**e)** $\displaystyle\int \frac{t^5+t^2+3}{t(t-1)(t^2+4)}\,dt$

**f)** $\displaystyle\int y^5 e^{y^2}\,dy$

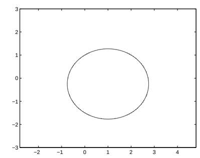
6. Du skall kunna grundläggande Trigonometri som t.ex. känna till sambandet mellan vinkelenheterna grader och radiander och kunna tolka dem geometriskt, kunna tolka de trigonometriska funktionerna m.h.a. enhetscirkeln och känna till värdena av de trigonometriska funktionerna för ”standardvinklarna”, trigonometriska ettan, lösa enklare ekvationer med de trigonometriska funktionerna, ”arcusfunktionerna och deras standardvärden”, solvera trianglar, beräkna värdet av en trigonometrisk funktion för en given vinkel givet att man känner till värdet för en annan mm (se t.ex. avs. P.7 i Adams).

## Svar

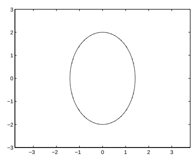
**1.** **a)**



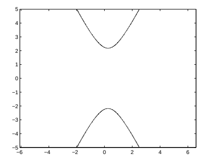
**d)**



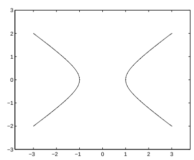
**b)**



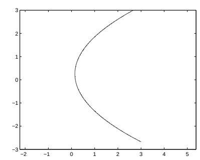
**e)**



**c)**



**f)**



**2.** **a)** Skalärprodukten av två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ skrivs $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}$ och den är definierad för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{Z}+)$.

**b)** Vektorprodukten av två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ skrivs $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ och den är definierad för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

**c)** $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = -13, \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-6, -4, 13)$

**d)** $\frac{1}{\sqrt{221}}(-6, -4, 13)$

**e)** 1

**f)** 7

**3.** **a)** $\mathbf{r} = (1, 1) + t(2, -1)$ (alternativt skrivsätt: $\mathbf{r} = (1 + 2t)\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j}$)

**b)** $\mathbf{r} = (-1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}) + t(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ (alternativt skrivsätt: $\mathbf{r} = (-1+t)\mathbf{i} + \frac{1}{2}(1+t)\mathbf{j} + \frac{1}{3}(2-t)\mathbf{k}$)

**c)** $\dfrac{1}{2}(x - 1) = y = -z - 2$

**d)** $\mathbf{r} = (3, 0, 0) + t(2, 0, -1) + s(1, 1, 1)$ (alternativt skrivsätt: $\mathbf{r} = (3+2t+s)\mathbf{i} + s\mathbf{j} + (s-t)\mathbf{k}$)

**e)** $2x + y - z = -3$

**f)** $\dfrac{1}{7}(-32, -9, 13)$

**4.** **a)** $f'(x) = \dfrac{4 - 2x - 2x^2}{(x^2+2)^2}$

**b)** $f'(1) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$

**c)** $\dfrac{d}{dt}\left(\ln|t + t^2|\right) = \dfrac{1+2t}{t+t^2}$

**d)** $\dfrac{d^2 g}{dx^2} = (\cos^2 x - \sin x)e^{\sin x}$

**e)** $h''(0) = 1$

**f)** $f'(x) = (\ln(px) + x\ln(px) + 1)e^{x+p}$

**5.** **a)** $\displaystyle\int_0^2 t(1+t)^9\,dt = \frac{19}{110}3^{10} + \frac{1}{110}$

**b)** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x+1}{x^2(x-1)}\,dx = 2\ln 2 - \frac{1}{2}$

**c)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \frac{\pi}{4}$

**d)** $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx = C - \cos(\ln x)$

**e)** $\displaystyle\int \frac{t^5+t^2+3}{t(t-1)(t^2+4)}\,dt = \frac{t^2}{2} + t - \frac{3}{4}\ln|t| +$
$\displaystyle + \ln|t-1| - \frac{13}{8}\ln|t^2+4| - \frac{3}{2}\arctan\frac{t}{2} + C$

**f)** $\displaystyle\int y^5 e^{y^2}\,dy = \left(\frac{1}{2}y^4 - y^2 + 1\right)e^{y^2} + C$

**6.** -