

Flervariabelanalys E2

Johan Jonasson ^{*†‡}

Oktober 2012

1 Kurvor på parameterform

Här betraktas vektorvärda funktioner $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eller $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Vi beskriver det sistnämnda fallet, eftersom det förstnämnda är enklare. Skriv $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ där koordinatfunktionerna är vanliga reellvärda envariabelfunktioner. Syftet med de vektorvärda funktionerna i det här kapitlet är att beskriva kurvor i rummet (eller i planet). Variabeln t tänker man sig som tid och $\mathbf{r}(t)$ positionen vid tidpunkten t hos en partikel som rör sig genom rummet. Om t rör sig från en starttidpunkt a till en sluttidpunkt b kommer funktionen \mathbf{r} att beskriva en kurva som startar i $\mathbf{r}(a)$ och slutar i $\mathbf{r}(b)$. Om vi kallar kurvan för \mathcal{C} och den beskrivs av $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, kallas detta för en *parametrisering* av \mathcal{C} .

Derivatans $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ är en vektor som är tangent till kurvan i punkten $\mathbf{r}(t)$ och pekar åt det håll partikeln rör sig. Om $\mathbf{r}'(t)$ är kontinuerlig och nollskild i alla punkter kallas kurvan för *slät* eller *glatt*. Vektorn $\mathbf{r}'(t)$ kallas för kurvans *hastighetsvektor*. Beloppet $|\mathbf{r}'(t)|$ är känd som *farten*. Vektorn $\mathbf{r}''(t)$ kallas följaktligen för kurvans *accelerationsvektor*. Ett antal standardparametriseringar följer.

- En linje genom punkten (x_0, y_0, z_0) med riktningsvektor (a, b, c) parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct), t \in \mathbb{R}.$$

*Chalmers University of Technology

†Göteborg University

‡jonasson@chalmers.se

Om det istället rör sig om en sträcka, låter man detta återspeglas genom rätt begränsning på t .

- En ellips centrerad i (x_0, y_0) med halvaxellängderna a respektive b ges av

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + b \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ett specialfall är cirkeln av radie a centrerad i samma punkt; detta är ju en ellips med $b = a$. Om man inte vill parametrisera hela cirkeln utan endast en del av den, ger man andra begränsningar i t . Exempelvis anger $\mathbf{r}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t)$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ halvcirkeln centrerad i origo och med radie 3 i högra halvplanet.

- En funktionskurva, dvs grafen till en kontinuerlig envariabelfunktion $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, parametriseras till exempel av $\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$, $a \leq t \leq b$.
- Om sambanden $g(x, y, z) = 0$ och $h(x, y, z) = 0$ anger varsin yta, finner man en parametrisering av skärningskurvan genom att finna en parameterlösning till ekvationssystemet

$$\begin{cases} g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Man ska observera att det aldrig finns en parametrisering av en kurva som är den enda rätta. I själva verket finns alltid oändligt många möjliga parametriseringar.

En kurva \mathcal{C} som ges av $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ kallas *sluten* om $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$. Den kallas *enkelt* om det för alla $a \leq s < t \leq b$, med undantag för fallet $s = a, t = b$, gäller att $\mathbf{r}(s) \neq \mathbf{r}(t)$. Längden av kurvan \mathcal{C} ges av

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

2 Ytor på parameterform

Här betraktas funktioner $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dessa används till att framställa ytor på parameterform. En yta, \mathcal{S} , som kan beskrivas av

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D,$$

sågs vara *glatt* om de partiella derivatorna \mathbf{r}'_u och \mathbf{r}'_v är kontinuerliga och det för varje $(u, v) \in D$ gäller att minst en av dem är nollskild. (Se nedan för definitionen av partiell derivata.) Mängden D är här alltid en sluten sammanhängande mängd i planet.

- En funktionsyta, dvs grafen till en kontinuerlig tvåvariablefunktion $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, kan parametreras av $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$, $(u, v) \in D$.
- En sfär av radie a kan parametreras av

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = (a \sin \phi \cos \theta, a \sin \phi \sin \theta, a \cos \phi), \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

En del av en sfär beskrivs på samma sätt, men med lämplig begränsning i ϕ och/eller θ .

3 Gränsvärden och kontinuitet

Betrakta en funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Skriv $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Funktionen f sägs ha *gränsvärdet* L då $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{b}$, skrivet

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{b}} f(\mathbf{x}) = L$$

om det dels gäller att det finns punkter i D_f godtyckligt nära \mathbf{b} , dels gäller att det till varje tal $\epsilon > 0$ finns ett tillräckligt litet tal $\delta > 0$ sådant att $|f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon$ så fort $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{b}| < \delta$. Om f är definierad i \mathbf{b} och $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{b}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{b})$ kallas f *kontinuerlig* i \mathbf{b} . Om f är kontinuerlig i \mathbf{b} för alla $\mathbf{b} \in D_f$, kallar vi f för *kontinuerlig*.

4 Partiella derivator

Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. För alla $j \in \{1, \dots, n\}$, är den *partiella derivatan* m.a.p. på variabel nummer j , derivatan av $f(x_1, \dots, x_n)$ betraktad som funktion av enbart x_j , dvs då de andra $n - 1$ variablerna betraktas som konstanter. Formellt blir definitionen att

$$f'_j(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)}{h}.$$

Andra beteckningar är f'_{x_j} och $\partial f / \partial x_j$.

5 Nivåkurvor och nivåytor

Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en tvåvariabelfunktion. Sambandet $f(x, y) = c$ anger ofta en kurva eller ett antal separata kurvor. I vilket fall som helst kallas sambandet $f(x, y) = c$ en *nivåkurva på nivå c* till f . Om istället $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ är en trevariabelfunktion anger sambandet $f(x, y, z) = c$ i allmänhet en yta eller ett antal separata ytor. Hursomhelst kallas sambandet $f(x, y, z) = c$ en *nivåyta på nivå c* till f .

6 Tangentplan till funktionsyta

Betrakta en glatt tvåvariabelfunktion $f(x, y)$ (dvs sådan att de partiella derivatorna är kontinuerliga). Vi söker en ekvation för tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$. Eftersom f'_1 och f'_2 anger lutningen i x - respektive y -led, ges två tangentvektorer till funktionsytan av $(1, 0, f'_1(a, b))$ och $(0, 1, f'_2(a, b))$. En normalvektor till tangentplanet ges alltså av en vektor som är vinkelrät mot dessa. En sådan vektor är till exempel vektorprodukten av tangentvektorerna. I detta fall blir vektorprodukten $(-f'_1(a, b), -f'_2(a, b), 1)$. Tangentplanet ges alltså av

$$z - f(a, b) - f'_1(a, b)(x - a) - f'_2(a, b)(y - b) = 0.$$

7 Högre ordningens derivator

Ett faktum som vi lämnar utan bevis är att om f är en tvåvariabelfunktion sådan att f''_{12} och f''_{21} båd är kontinuerliga, gäller att

$$f''_{12} = f''_{21}$$

Mer generellt gäller för alla flervariabelfunktioner att de blandade högre ordningens partiella derivator inte beror av i vilken ordning man deriverar m.a.p. de olika variablerna utan bara hur många gånger man deriverar m.a.p. varje variabel. Detta förutsätter att alla inblandade derivator är kontinuerliga.

Den s.k. *Hessematrisen* till tvåvariabelfunktionen f ges av

$$f''(x, y) = \begin{bmatrix} f''_{11}(x, y) & f''_{12}(x, y) \\ f''_{21}(x, y) & f''_{22}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Om de inblandade derivatorna är kontinuerliga är alltså Hessematrisen symmetrisk. Hessematrisen som begrepp generaliserar sig på ett uppenbart sätt till funktioner av n variabler. Hessematrisen blir då en $n \times n$ -matris, som, om all inblandade derivator är kontinuerliga, är symmetrisk.

8 Kedjeregeln

Betrakta en tvåvariabelfunktion $f(x, y)$. Man säger att f är *differentierbar* i punkten (a, b) om

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - hf'_1(a, b) - kf'_2(a, b)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Antag nu att de två variablerna x och y i sin tur är funktioner av en annan variabel t , dvs $x = x(t)$ och $y = y(t)$. Om punkten t är sådan att f är differentierbar i $(x(t), y(t))$ och $x'(t)$ och $y'(t)$ existerar, gäller att

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = f'_1(x(t), y(t))x'(t) + f'_2(x(t), y(t))y'(t).$$

Detta generaliserar sig på ett rättframt sätt till funktioner av n variabler där alla variablerna är funktioner av t , dvs $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Kedjeregeln tar då formen

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{x}(t)) = f'(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}'(t),$$

där $f'(\mathbf{x}(t))$ är radvektorn $(f'_1(\mathbf{x}(t)), \dots, f'_n(\mathbf{x}(t)))$ och $\mathbf{x}'(t)$ är kolonnvektorn $(x'_1(t), \dots, x'_n(t))^T$. En ytterligare generalisering erhålls genom att betrakta en funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Skriv \mathbf{f} som en kolonnvektor: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T$. Låt $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ vara den $m \times n$ -matris som har $\partial f_i / \partial x_j$ som element (i, j) . Då ger kedjeregeln att

$$\frac{d}{dt}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}'(t)$$

eftersom element i i den resulterande kolonnvektorn är kedjeregeln tillämpad på f_i . En slutlig generalisering får vi genom att låta även x_i :na vara fler-variabelfunktioner, $x_i = x_i(\mathbf{t}) = x_i(t_1, \dots, t_k)$. Eftersom partiella derivator fungerar exakt som "vanliga" derivator där alla variabler utom en betraktas

som konstanter, kan man tillämpa kedjeregeln till att beräkna de partiella derivatorna m.a.p. t_j av $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ enligt ovanstående. Resultatet sammanfattas av

$$\frac{d}{dt}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}'(t).$$

I den resulterande $m \times k$ -matrisen innehåller kolonn j de partiella derivatorna m.a.p. t_j , enligt ovan, eller med andra ord, element (i, j) i slutresultatet är $\frac{d}{dt_j}f_i(\mathbf{x}(t))$.

9 Bevis av kedjeregeln

Vi betraktar endast fallet $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dvs $f = f(x, y)$, $x = x(t)$ och $y = y(t)$. Fixera t och antag att $x'(t)$ och $y'(t)$ existerar och att f är differentierbar i $(x(t), y(t))$. Skriv $p = x(t)$ och $q = y(t)$ och skriv $w(t) = f(x(t), y(t))$. Vi vill visa att $w'(t) = f'_1(p, q)x'(t) + f'_2(p, q)y'(t)$. Definiera funktionen $E(h, k)$ genom att sätta

$$E(h, k) = \frac{f(p+h, q+k) - f(p, q) - hf'_1(p, q) - kf'_2(p, q)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

för $(h, k) \neq (0, 0)$ och $E(0, 0) = 0$. Eftersom f är differentierbar i (p, q) är E kontinuerlig. Enkel manipulation av uttrycket som definierar E ger att

$$f(p+h, q+k) - f(p, q) = hf'_1(p, q) + kf'_2(p, q) + \sqrt{h^2 + k^2}E(h, k).$$

Använd nu detta med $h = x(t+s) - x(t)$ och $k = y(t+s) - y(t)$. Notera att $x(t+s) = x(t) + h$ och $y(t+s) = y(t) + k$. Vi får

$$\begin{aligned} \frac{w(t+s) - w(t)}{s} &= \frac{f(p+h, q+k) - f(p, q)}{s} \\ &= \frac{h}{s}f'_1(p, q) + \frac{k}{s}f'_2(p, q) + \sqrt{h^2 + k^2} \frac{E(h, k)}{s}. \end{aligned}$$

Men det är ju så att $h/s = (x(t+s) - x(t))/s$ som konvergerar mot $x'(t)$ då $s \rightarrow 0$. På samma sätt gäller att $k/s \rightarrow y'(t)$ då $s \rightarrow 0$. Den sista termen går mot 0 då $s \rightarrow 0$ eftersom $E(h, k) \rightarrow 0$ och $\sqrt{(h/s)^2 + (k/s)^2} \rightarrow \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} < \infty$. Genom att summera dessa slutsatser erhålls kedjeregeln.

10 Gradient och riktningsderivata

Betrakta n -variabelfunktionen $f(\mathbf{x})$. Radvektorn

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (f'_1(\mathbf{x}), \dots, f'_n(\mathbf{x}))$$

kalls för *gradienten* till f i punkten \mathbf{x} .

Antag att $f(\mathbf{x})$ är differentierbar i punkten \mathbf{x} . (Dvs $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} (f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})\mathbf{h})/|\mathbf{h}| = 0$.) Då kan man, för en enhetsvektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, definiera *riktningsderivatan* av f i riktning \mathbf{u} . Den ges av

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{h}.$$

En annan beteckning för $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ är $f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$. Om \mathbf{u} inte är en enhetsvektor, använder man som konvention att $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{u}/|\mathbf{u}|}f(\mathbf{x})$.

Sats 10.1 Om \mathbf{u} är en enhetsvektor gäller att

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(\mathbf{x}).$$

Bevis. Genom att låta $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{u})$ får man att $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = g'(0)$. Nu ger kedjeregeln att

$$g'(t) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(\mathbf{x} + t\mathbf{u})$$

Ta nu bara $t = 0$ och saken är klar.

En omedelbar följd av detta är:

Sats 10.2 Vektorn $\nabla f(\mathbf{b})$ är vinkelrät mot nivå(hyper)planet $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{b})$. Vidare gäller i punkten \mathbf{b} att f växer snabbast i riktning $\nabla f(\mathbf{b})$ och avtar snabbast i riktning $-\nabla f(\mathbf{b})$.

Notera att med $n = 2$ blir nivåhyperplanet helt enkelt en nivåkurva och med $n = 3$ en vanlig nivåyta.

11 Tangentplan till nivåyta

I det här avsnittet ska vi finna ekvationen till ett tangenthyperplan till en nivåhyperyta till en n -variabelfunktion: $f(\mathbf{x}) = 0$. Låt \mathbf{b} vara en punkt på nivåhyperytan. Gradienten till f i denna punkt är vinkelrät mot nivåhyperytan

och därmed även till dess tangent. Med andra ord gäller det för varje punkt \mathbf{x} på tangenthyperplanet att $\mathbf{x} - \mathbf{b}$ och $\nabla f(\mathbf{b})$ är vinkelräta, dvs

$$(\mathbf{x} - \mathbf{b}) \cdot \nabla f(\mathbf{b}) = 0.$$

Detta anger tangenthyperplanets ekvation. På koordinatvis form blir detta

$$\sum_{i=1}^n f'_i(\mathbf{b})(x_i - b_i) = 0.$$

Med $n = 2$ blir detta ekvationen för tangentlinjen till nivåkurvan genom punkten (b_1, b_2) :

$$f'_1(b_1, b_2)(x - b_1) - f'_2(b_1, b_2)(y - b_2) = 0.$$

Med $n = 3$ får vi ekvationen för tangentplanet till nivåytan genom (b_1, b_2, b_3) :

$$f'_1(\mathbf{b})(x - b_1) + f'_2(\mathbf{b})(y - b_2) + f'_3(\mathbf{b})(z - b_3) = 0.$$

Notera att ekvationen för ett tangentplan till funktionsytan $z = f(x, y)$ genom $(a, b, f(a, b))$ följer som ett specialfall, eftersom funktionsytan kan ses som $g(x, y, z) = 0$ med $g(x, y, z) = z - f(x, y)$. Vi får då

$$-f'_1(a, b)(x - a) - f'_2(a, b)(y - b) + z - f(a, b) = 0$$

precis som förut.

12 Taylors formel

Kom igång McLaurinutvecklingen av envariabelfunktion g :

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + R_3$$

där $R_3 = (1/6)g'''(\theta t)$ för något $\theta \in [0, 1]$. Detta gäller under förutsättning att g är tre gånger kontinuerligt deriverbar. Antag nu att $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är sådan att alla de tredje ordningens paritella derivatorna är kontinuerliga. Fixera en punkt $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ och låt \mathbf{h} vara en vektor i \mathbb{R}^n sådan att $|\mathbf{h}|$ är "litet". Sätt $g(t) = f(\mathbf{b} + t\mathbf{h})$. Då är g tre gånger kontinuerligt deriverbar.

Genom att tillämpa McLaurinutvecklingen ovan på g m.h.j.a. kedjeregeln och slutligen sätta $t = 1$, erhålls Taylors formel för utvecklingen av f kring \mathbf{b} :

$$f(\mathbf{b} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{b}) + f'(\mathbf{b})\mathbf{h} + \frac{1}{2}\mathbf{h}^T f''(\mathbf{b})\mathbf{h} + R_3.$$

Här gäller som vanligt att $f'(\mathbf{x})$ är radvektorn med de partiella derivatorna av f som element, $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)^T$ och $f''(\mathbf{x})$ är Hessematrisen av f i \mathbf{x} . Feltermen R_3 ges av $g'''(\theta)$ för något $\theta \in [0, 1]$. I fallet $n = 2$ får Taylors formel utseendet

$$\begin{aligned} f(b_1 + h_1, b_2 + h_2) &= f(b_1, b_2) + h_1 f'_1(b_1, b_2) + h_2 f'_2(b_1, b_2) \\ &+ \frac{1}{2}(h_1^2 f''_{11}(b_1, b_2) + 2h_1 h_2 f''_{12}(b_1, b_2) + h_2^2 f''_{22}(b_1, b_2)) \\ &+ R_3. \end{aligned}$$

Uttrycket i Taylorutvecklingen ovan, utan feltermen, är ett andragragspolynom och kallas för *Taylorpolynomet av grad 2* till f kring \mathbf{b} .

13 Extremvärden

Låt f vara en n -variabelfunktion definierad på området D , en delmängd av \mathbb{R}^n . Vilket är det största värde som f antar och var sker detta? Vad är det minsta värdet och var antas det? Finns det andra punkter där f har ett lokalt maximum eller lokalt minimum? Detta är de grundläggande frågorna i detta avsnitt. Låt $\mathbf{x} \in D$. Man säger att f har

- ett *lokalt minimum* i \mathbf{x} om det finns ett tal $\epsilon > 0$ sådant att $f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \geq f(\mathbf{x})$ för alla \mathbf{h} sådana att $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in D$ och $|\mathbf{h}| < \epsilon$,
- ett *lokalt maximum* i \mathbf{x} om det finns ett tal $\epsilon > 0$ sådant att $f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \leq f(\mathbf{x})$ för alla \mathbf{h} sådana att $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in D$ och $|\mathbf{h}| < \epsilon$,
- en *sadelpunkt* i \mathbf{x} om $f'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ och det för alla $\epsilon > 0$ finns både \mathbf{h} med $|\mathbf{h}| < \epsilon$ och $f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \leq f(\mathbf{x})$ och \mathbf{h} med $|\mathbf{h}| < \epsilon$ och $f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \geq f(\mathbf{x})$.

En punkt \mathbf{x} med $f'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ kallas en *kritisk punkt* (eller en *stationär punkt*) till f . En kritisk punkt kan alltså vara position för ett lokalt minimum, ett lokalt maximum eller en sadelpunkt. Lokala extremvärden finns att söka dels bland f 's kritiska punkter, men också bland f 's eventuella *singulära punkter*

(dvs punkter där minst en av f 's partiella derivator inte existerar) och bland de eventuella randpunkterna till D . Vi kommer här enbart att arbeta med glatta funktioner, dvs funktioner vars partiella derivator $f'_i, i = 1, \dots, n$, alla är kontinuerliga. Således är singulära punkter inte aktuella. Vi ska också anta att definitionsområdet D är slutet, dvs alla eventuella randpunkter till D ligger också i D .

13.1 Extremvärden bland kritiska punkter

Sats 13.1 *Antag att \mathbf{x} är en kritisk punkt till f . Då gäller följande.*

- *Om alla egenvärden till $f''(\mathbf{x})$ är strikt positiva har f ett lokalt minimum i \mathbf{x} .*
- *Om alla egenvärden till $f''(\mathbf{x})$ är strikt negativa har f ett lokalt maximum i \mathbf{x} .*
- *Om det finns både strikt positiva och strikt negativa egenvärden till $f''(\mathbf{x})$ har f en sadelpunkt i \mathbf{x} .*

Observera att i de fall då en kritisk punkt inte faller under något av satsens tre utsagor, krävs vidare undersökning med andra medel.

Bevis. Eftesom \mathbf{x} är en kritisk punkt ger Taylors formel kring \mathbf{x} att

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^T f''(\mathbf{x})\mathbf{h} + R_3.$$

När $|\mathbf{h}|$ är tillräckligt litet är feltermen till sitt belopp försumbar i förhållande till den kvadratiske formen om denna är nollskild för punkter i närheten av \mathbf{x} , vilket gäller enligt satsens antagande. Om alla egenvärden till $f''(\mathbf{x})$ är strikt positiva följer via diagonalisering av $f''(\mathbf{x})$ att $\mathbf{h}^T f''(\mathbf{x})\mathbf{h} > 0$ för alla nollskilda \mathbf{h} tillräckligt nära $\mathbf{0}$, dvs f har ett lokalt minimum i \mathbf{x} . Satsens andra utsaga är analog. Om det finns strikt positiva och strikt negativa egenvärden ger diagonaliseringen att det dels finns \mathbf{h} godtyckligt nära $\mathbf{0}$ sådana att $\mathbf{h}^T f''(\mathbf{x})\mathbf{h} > 0$, dels finns \mathbf{h} godtyckligt nära $\mathbf{0}$ sådana att $\mathbf{h}^T f''(\mathbf{x})\mathbf{h} < 0$. Därför måste f ha en sadelpunkt i \mathbf{x} .

13.2 Extremvärden bland randpunkter

Vi ser först på fallet $n = 2$, dvs f är en tvåvariabelfunktion. I många fall består randen av D av en eller flera glatta kurvor. Man kan då behandla

dessa kurvor (var för sig) genom att parametrisera dem, varpå man står inför ett extremvärdesproblem i en variabel. Mer konkret: antag att en del av randen är en glatt kurva \mathcal{C} , som kan representeras av parametriseringen $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Att söka efter extremvärden på denna del av randen betyder alltså att söka extremvärden till envariabelfunktionen $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$, $a \leq t \leq b$.

För $n = 3$ består i många fall randen av en eller flera slutna ytor. Dessa behandlas var för sig enligt följande. Betrakta en del av randen som utgörs av en sluten yta, som kan parametriseras av $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in E$ (där E är en sluten delmängd av \mathbb{R}^2). Att söka extremvärden på denna del av randen blir då att söka extremvärden till tvåvariabelfunktionen $g(u, v) = f(\mathbf{r}(u, v))$, $(u, v) \in E$. Detta kan i sin tur behandlas som ovan.

Detta sätt att arbeta kan på ett uppenbart sätt drivas vidare till $n = 4, 5, \dots$, men vi intresserar oss inte för $n \geq 3$ i denna kurs, när det gäller extremvärden på randen till definitionsmängden.

13.3 Lagrange multiplikatormetod

Antag återigen att $n = 2$. Ett alternativt sätt att söka extrempunkter på randen till tvåvariabelfunktionen f :s definitionsområde är att använda en *Lagrangemultiplikator*. Mer generellt kan ju randproblemet uttryckas som att vi söker extrempunkter till $f(x, y)$ under bivillkoret att $g(x, y) = 0$, där vi antar att sambandet $g(x, y) = 0$ beskriver en glatt kurva. (Om kurvan vi befinner oss på består av ett antal glatta delar, kan dessa behandlas var för sig.)

Antag nu att (x_0, y_0) är en lokal extrempunkt till $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = 0$. Antag också att (x_0, y_0) inte är en ändpunkt till kurvan $g(x, y) = 0$. Då måste riktningsderivatan till f i kurvan $g(x, y) = 0$'s riktning vara 0. Med andra ord, om \mathbf{u} är en vektor, placerad i (x_0, y_0) , i kurvans riktning gäller att

$$\mathbf{u} \cdot \nabla f(x_0, y_0) = 0,$$

dvs \mathbf{u} och $\nabla f(x_0, y_0)$ är vinkelräta. Nu beskriver ju kurvan vi befinner oss på också en nivåkurva till g (på nivå 0). Därmed är $\nabla g(x_0, y_0)$ också vinkelrät till \mathbf{u} . Detta betyder att $\nabla f(x_0, y_0)$ och $\nabla g(x_0, y_0)$ är parallella, dvs det finns ett tal λ_0 sådant att $\nabla f(x_0, y_0) + \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0) = \mathbf{0}$. Definiera nu *Lagrangefunktionen*:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Det vi kommit fram till kan nu uttryckas som att (x_0, y_0, λ_0) är en kritisk punkt till L . Vi har alltså kommit fram till att om (x_0, y_0) är en lokal extrempunkt till $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = 0$, så är (x_0, y_0) en ändpunkt till kurvan $g(x, y) = 0$, eller så finns det ett tal λ_0 så att (x_0, y_0, λ_0) är en kritisk punkt till $L(x, y, \lambda)$. (Talet λ kallas för en Lagrangemultiplikator.) Med andra ord: de lokala extrempunkterna till $f(x, y)$ på kurvan $g(x, y) = 0$ finns att söka de kritiska punkterna till $L(x, y, \lambda)$ och kurvans ändpunkter.

Metoden kan utvidgas till högre dimensioner. Man kan då behöva upp till $n - 1$ Lagrangemultiplikatorer, eftersom man kan ha upp till $n - 1$ samband mellan de n variablerna och ändå ha åtminstone en kurva i \mathbb{R}^n liksom vilken variablerna kan variera.

14 Newtons metod

Betrakta ett ekvationssystem av n ekvationer i n variabler. Detta kan alltid skrivas som $f_1(x_1, \dots, x_n) = 0$, $f_2(x_1, \dots, x_n) = 0$, \dots , $f_n(x_1, \dots, x_n) = 0$. På vektorform blir detta $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, där $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ och $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$. Antag att vi inte klarar att lösa ekvationssystemet explicit. Då kan vi använda följande numeriska metod. Låt \mathbf{b} vara en första gissning av en lösning till ekvationssystemet. Med all sannolikhet kommer det att visa sig att $\mathbf{f}(\mathbf{b}) \neq \mathbf{0}$. Approximera nu varje f_i linjärt i närheten av \mathbf{b} . På matrisform blir det

$$\mathbf{f}(\mathbf{b} + \mathbf{h}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{b}) + \mathbf{f}'(\mathbf{b})\mathbf{h}.$$

Man vill finna \mathbf{h} så att vänsterledet är $\mathbf{0}$, men eftersom vi inte klarar detta sätter vi istället högerledet till $\mathbf{0}$. Detta ger

$$\mathbf{h} = -\mathbf{f}'(\mathbf{b})^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{b}).$$

Ersätt sedan \mathbf{b} med $\mathbf{b} + \mathbf{h}$ och upprepa proceduren från början, tills t.ex. skillnaden mellan två på varandra följande "gissningar" är så liten som önskat. Om startgissningen är god, konvergerar Newtons metod oftast mycket fort.

15 Implicit derivering

Betrakta en glatt kurva i planet given av sambandet $F(x, y) = 0$. I allmänhet kan inte denna kurva beskrivas som en funktionskurva $y = y(x)$ eller $x = x(y)$. Dock gäller ofta för de allra flesta punkter (a, b) på kurvan att man

lokalt kring denna punkt kan betrakta kurvan som en funktionskurva, säg $y = y(x)$. Ofta är det trots allt dessvärre så att det inte går att explicit lösa ut y som funktion av x , eftersom ekvationen $F(x, y) = 0$ helt enkelt är för svår eller saknar explicit lösning. Då kan man trots allt faktiskt beräkna derivatan av den okända funktionen $y = y(x)$. Ansätt $y = y(x)$ så att $F(x, y) = 0$ kan uttryckas helt i termer av x via $F(x, y(x)) = 0$. Derivera nu bägge sidor av detta samband. Detta ger m.h.j.a. kedjeregeln

$$F'_1(x, y(x)) + y'(x)F'_2(x, y(x)) = 0.$$

Sätt in $(x, y) = (a, b)$ och lös ut $y'(x)$:

$$y'(a) = -\frac{F'_1(a, b)}{F'_2(a, b)}.$$

Från detta kan man till exempel bestämma ekvationen för ett tangentplan till kurvan i punkten (a, b) : låt $k = y'(a)$ enligt ovan så att tangentplanet får ekvationen $y - b = k(x - a)$. Vi ser av uttrycket för $y'(a)$ att angreppssättet fungerar då $F'_2(a, b) \neq 0$.

Om vi går upp till tre dimensioner motsvaras resonemanget av situationen då $F(x, y, z) = 0$ beskriver en glatt yta. Lokalt kring de flesta punkter (a, b, c) på planet kan ytan beskrivas som en funktionsyta $z = z(x, y)$. Derivera nu sambandet $F(x, y, z(x, y)) = 0$ partiellt m.a.p x och y . Detta ger uttryck för $\partial z / \partial x$ och $\partial z / \partial y$. För att detta ska fungera krävs att $F'_3(a, b, c) \neq 0$.

16 Dubbelintegraler

Låt $f(x, y)$ vara en ickenegativ och begränsad tvåvariabelfunktion och låt området D i xy -planet vara en del av D_f . Antag också att D är ett begränsat område. Dubbelintegralen av f över D är volymen av den kropp som begränsas av funktionsytorna $z = f(x, y)$ och $z = 0$ och ytan $(x, y) \in \partial D, 0 \leq z \leq f(x, y)$. Dubbelintegralen betecknas med

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy.$$

En alternativ beteckning är $\iint_D f(x, y) dA$. Det är uppenbart att integralen är linjär i sina argument, att integralen av 0 är 0, att $\iint_D dx dy = \text{area}(D)$, att $\iint_D f(x, y) \, dx dy \leq \iint_D g(x, y) \, dx dy$ om $f \leq g$ och att om man delar

upp d i delar ges dubbelintegralen över D av summan av dubbelintegralerna över delområdena. Genom att dela upp D i allt mindre delar och approximera volymen av kroppen genom att approximera $f(x, y)$ i delområdena med funktionen som är konstant lika med ett av f :s värden i delområdet, inser man att man kan beräkna dubbelintegralen genom upprepad enkelintegration. Speciellt, om D är given av $a \leq x \leq b$, $c(x) \leq y \leq d(x)$, gäller

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Om D ges av $c \leq y \leq d$, $a(y) \leq x \leq b(y)$, får vi

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Alternativa tolkningar av dubbelintegraler istället för som en volym är t.ex.

- Den totala laddningen av ytan D då denna är belagd med laddning av laddningstäthet $f(x, y) \, Q/m^2$.
- Den totala massan av ytan D om denna är belagd med massa av densitet $f(x, y) \, kg/m^2$.

Då $f(x, y)$ inte är en ickenegativ funktion, skriver vi $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$, så att $f = f^+ - f^-$, och definierar

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_D f^+(x, y) \, dx dy - \iint_D f^-(x, y) \, dx dy.$$

17 Oegentliga integraler

Oegentliga integraler definierar vi endast för ickenegativa funktioner. Om $f(x, y)$ är obegränsad eller om D är ett obegränsat område, räknar vi bara som vanligt. Om slutresultatet blir ett ändligt tal, säger vi att dubbelintegralen konvergerar till detta tal. Om slutresultatet bli ∞ , säger vi att dubbelintegralen divergerar.

18 Trippelintegraler

För en begränsad ickenegativ trevariabelfunktion $f(x, y, z)$ på ett begränsat område i \mathbb{R}^3 ges trippelintegralen av f över D av den totala laddningen av D om området är belagt med laddning av täthet $f(x, y, z) Q/m^3$. Den betecknas

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D f(x, y, z) dV.$$

Utvidgningen till funktioner som antar värden av båda tecken görs precis som i tvåvariabelfallet. Beräkning görs med upprepade enkelintegration också precis som i tvåvariabelfallet.

19 Variabelsubstitution

Låt $f(x_1, x_2)$ vara en tvåvariabelfunktion. Vi vill beräkna dubbelintegralen $\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$ m.h.j.a. substitutionen $x_1 = g_1(u_1, u_2)$, $x_2 = g_2(u_1, u_2)$ där $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ är bijektiv och kontinuerlig. (Givetvis är $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$.) Med detta samband mellan (x_1, x_2) och (u_1, u_2) inser man att en infinitesimal rektangel med sidorna du_1 och du_2 i $u_1 u_2$ -planet i punkten (u_1, u_2) svarar mot en infinitesimal parallelogram i (x_1, x_2) -planet uppspänd av vektorerna

$$\left(\frac{\partial g_1}{\partial u_1}(u_1, u_2) du_1, \frac{\partial g_2}{\partial u_1}(u_1, u_2) du_1 \right)$$

och

$$\left(\frac{\partial g_1}{\partial u_2}(u_1, u_2) du_2, \frac{\partial g_2}{\partial u_2}(u_1, u_2) du_2 \right).$$

Arean av denna parallelogram ges av absolutbeloppet av determinanten av matrisen med dessa vektorer som kolonner, dvs av $|\det(\mathbf{g}'(\mathbf{u}))| du_1 du_2$. Sammantaget gäller alltså att

$$\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\mathbf{g}^{-1}(D)} f(g_1(u_1, u_2), g_2(u_1, u_2)) |\det(\mathbf{g}'(\mathbf{u}))| du_1 du_2.$$

Detta kan kort och gott sammanfattas med

$$dx_1 dx_2 = |\det(\mathbf{g}'(\mathbf{u}))| du_1 du_2$$

eller på matrisform

$$d\mathbf{x} = |\det(\mathbf{g}'(\mathbf{u}))| d\mathbf{u}.$$

Matrisformen har den fördelen att den utvidgar sig även funktioner av flera variabler.

Den mest använda substitutionen i tvåvariabelfallet *polär substitution*. Den ges av $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$. Notera att $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Vi får

$$dx_1 dx_2 = r dr d\theta.$$

Polär substitution används oftast då området D är en cirkelskiva, eftersom detta svarar mot $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq R$ där R är cirkelskivans radie, eller då D är en del av en cirkelskiva.

I trevariabelfallet använder man ofta *cylindrisk substitution* eller *sfärisk substitution*. Den cylindriska substitutionen ges av polär substitution av två av variablerna, säg x_1 och x_2 , dvs $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, x_3 oförändrad. Alltså får vi

$$dx_1 dx_2 dx_3 = r dr d\theta dx_3.$$

Den sfäriska substitutionen ges av

$$x_1 = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad x_2 = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad x_3 = \rho \cos \phi.$$

Med upprepat användande av trigonometriska ettan finner man att Jacobi-matrisen $\mathbf{g}'(\rho, \phi, \theta)$ har determinanten $\rho^2 \sin \phi$, varför

$$dx_1 dx_2 dx_3 = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta.$$

20 Vektorfält

En funktion $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ från \mathbb{R}^3 till \mathbb{R}^3 kallas för ett *vektorfält*. En funktion $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ kallas ett *plant vektorfält*. Eftersom ett plant vektorfält kan ses som ett tredimensionellt vektorfält genom att lägga till en nolla som tredjekomponent, följer alla fakta om plana vektorfält av fakta kring tredimensionella vektorfält som enklare specialfall. Vi ska kalla \mathbf{F} för ett *glatt* vektorfält om de tre komponenternas alla partiella derivator är kontinuerliga.

Ett specialfall av ett vektorfält erhålls genom att låta $\mathbf{F} = \nabla \phi$ för en partiellt deriverbar trevariabelfunktion ϕ . Ett glatt fält, \mathbf{F} , som kan skrivas på detta sätt kallas för ett *konservativt* vektorfält och en funktion ϕ sådan att $\mathbf{F} = \nabla \phi$ kallas en *potential* till \mathbf{F} . Eftersom \mathbf{F} antas vara glatt betyder

det att ϕ :s partiella andraderivator är kontinuerliga och som följd av detta är $\phi''_{12} = \phi''_{21}$, $\phi''_{13} = \phi''_{31}$ och $\phi''_{23} = \phi''_{32}$. För \mathbf{F} betyder detta att

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Detta är alltså ett nödvändigt villkor för att ett vektorfält \mathbf{F} ska kunna vara konservativt. Det blir också ett tillräckligt villkor om vi lägger till att området $D \subseteq \mathbb{R}^3$ som \mathbf{F} är definierat på är *enkelsammanhängande*, dvs sammanhängande och saknar "hål".

21 Båglängdsintegraler

Låt $f(x)$ vara en funktion definierad på intervallet $[a, b]$ och antag att $f(x)$ är laddningstätheten i punkten x (i enhet Q/m) av ett elektriskt fält. Då blir resultatet av integralen $\int_a^b f(x) dx$ av f över $[a, b]$ den totala laddningen av intervallet $[a, b]$. Låt nu \mathcal{C} vara en glatt kurva i rummet och låt denna vara belagd med laddning av laddningstäthet $f(x, y, z)$ i punkten (x, y, z) för alla $(x, y, z) \in \mathcal{C}$. Den totala laddningen av \mathcal{C} kallar vi nu *båglängdsintegralen* av f över \mathcal{C} och betecknar med $\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds$. För att inse hur man konkret beräknar båglängdsintegralen, låt $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ vara en parametrisering av \mathcal{C} och betrakta ett infinitesimalt stycke av kurvan, svarande mot delen av kurvan mellan "tid"punkterna t och $t + dt$. Detta stycke är alltså det stycke av kurvan som går mellan punkterna $\mathbf{r}(t)$ och $\mathbf{r}(t + dt) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}'(t)dt$. Etersom det betraktade kurvstycket är infinitesimalt och kurvan är glatt, är det en rät sträcka och har alltså längd $|\mathbf{r}'(t)|dt$ och därmed laddningen $f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt$. Genom att summera, vilket betyder att integrera då det handlar om infinitesimala stycken, över hela kurvan finner vi att

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Observera att resonemanget med räkning och summering av infinitesimala stycken är intuitivt och inte ett formellt matematiskt resonemang. Vi har alltså inte *bevisat* att denna ekvation gäller. Istället har vi resonerat oss fram till att ekvationen *bör* gälla och använder den därför till att *definiera* båglängdsintegralen.

Det intuitiva resonemanget som leder fram till definitionen gör det klart att resultatet inte är beroende av vilken parametrisering av \mathcal{C} man arbetar

med. Vi går inte vidare med något formellt bevis av detta, utan nöjer oss med att konstatera att så är fallet.

22 Kurvintegraler i vektorfält

Låt \mathcal{C} vara en glatt kurva i rummet och låt $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ vara en parametrisering av kurvan. Låt \mathbf{F} vara ett vektorfält i rummet. Antag att $\mathbf{F}(x, y, z)$ är en kraftvektor som påverkar en given partikel om den befinner sig i punkten (x, y, z) . (Exempelvis kan det röra sig om en laddad partikel och \mathbf{F} kan vara den kraft ett elektriskt fält resulterar i.) *Kurvintegralen* $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är det effektiva arbete fältet \mathbf{F} utför på partikeln om den rör sig längs kurvan \mathcal{C} från a till b . Det effektiva arbetet då partikeln rör sig från $\mathbf{r}(t)$ till $\mathbf{r}(t + dt) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}'(t)dt$ är kraftens komponent i rörelsen riktning gånger rörelsens sträcka, dvs $(\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|)\mathbf{r}'(t)dt = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$ (eftersom $\mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$ är en enhetsvektor i rörelsens riktning). Summering, dvs integrering, ger upphov till följande definition

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Eftersom all vår erfarenhet av räkning med infinitesimaler gör att det är rimligt att skriva $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$, är det också rimligt att införa den alternativa beteckningen

$$\int_{\mathcal{C}} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

för kurvintegralen.

Vi har använt den fysikaliska metaforen arbete för att beskriva kurvintegraler. Fysikalisk intuition skulle kunna leda oss till att anta att värdet av $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$ endast beror av kurvan \mathcal{C} genom dess start- och slutpunkt. Detta är dock i allmänhet inte sant. Om vektorfältet \mathbf{F} är konservativt däremot, fungerar intuitionen, ty då gäller att $\mathbf{F} = \nabla\phi$ för en potential ϕ , så

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla\phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}\phi(\mathbf{r}(t)) dt \\ &= \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a)). \end{aligned}$$

dvs kurvintegralen blir differensen mellan potentialen i kurvans slutpunkt och startpunkt. Ett specialfall är då kurvan \mathcal{C} är sluten, då kurvintegralen alltså blir 0. Det finns för övrigt en speciell beteckning för kurvintegralen över en sluten kurva, nämligen $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där ringen kring integraltecknet symboliserar just att man avser en sluten kurva. Det gäller alltså till exempel att

$$\oint_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

23 Ytintegraler

En ytintegral är en tvådimensionell analog till en båglängdsintegral. Låt \mathcal{S} vara en glatt yta i rummet, parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$. Låt $f(x, y, z)$ vara en trevariabelfunktion och antag att ytan \mathcal{S} är belagd med laddning med laddningstäthet $f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ (enhet Q/m^2). Då är *ytintegralen* av f över \mathcal{S} given av ytans totala laddning. För att beräkna den totala laddningen, observera att den infinitesimala rektangeln $[u, u + du] \times [v, v + dv]$ i D svarar mot den infinitesimala parallelogrammen i \mathcal{S} spänd av vektorerna $\partial\mathbf{r}/\partial u$ och $\partial\mathbf{r}/\partial v$, precis enligt de räkningar vi gjorde i samband med variabelsubstitution. Arean av parallelogrammen är $|\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v| dudv$, så dess laddning är $f(\mathbf{r}(u, v))|\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v| dudv$ och den totala laddningen ges av integrera detta över D . Denna intuitiva beräkning ligger till grund för att vi definierar ytintegralen som

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \left| \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv.$$

24 Flödesintegraler

Flödesintegraler är en speciell typ av ytintegraler. Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett vektorfält i rummet och antag att $\mathbf{F}(x, y, z)$ anger en flödeshastighet (enhet m/s) i (x, y, z) . Man kan tänka sig att detta beskriver en vätska som flödar genom rummet, men observera då att vektorfältet kan vara till sin natur sådant att det även innefattar att det "skapar" eller "förintar" vätska med en intensitet som varierar över rummet.

Låt \mathcal{C} vara en glatt enkelsammanhängande yta, parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$. Vi är intresserade av hur stort nettoflöde genom \mathcal{S} som \mathbf{F} ger upphov till. Det krävs då att man skiljer och håller reda på ytans två sidor.

(Om det ens finns två sidor; ett Möbiusband är ett exempel på en glatt yta som endast har en sida.) Ytan \mathcal{S} kallas *orienterbar* om man kan finna en kontinuerlig funktion $\hat{\mathbf{N}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sådan att $\hat{\mathbf{N}}(x, y, z)$ är vinkelrät mot ytans tangentplan i (x, y, z) och $|\hat{\mathbf{N}}(x, y, z)| = 1$, för alla $(x, y, z) \in \mathcal{S}$. En sådan funktion kallas ett *normalvektorfält* till \mathcal{S} . Med ett normalvektorfält angivet, kallas ytan *orienterad*. Den sida av ytan där riktningen av $\hat{\mathbf{N}}$ är ut från ytan, kallas den positiva sidan och den andra sidan kallas således den negativa sidan. Normalvektorfältet ger också en orientering till ytans eventuella rand; konventionen är att randen är orienterad moturs sedd från ytans positiva sida.

Antag nu att \mathcal{S} är en orienterad yta, med normalvektorfältet $\hat{\mathbf{N}}$. Frågan om nettoflödet genom \mathcal{S} kan nu specificera till att gälla nettoflödet från den negativa sidan till den positiva sidan. Betrakta ett infinitesimalt utsnitt av \mathcal{S} , med area dS kring en punkt (x, y, z) på ytan. Den effektiva flödes hastigheten genom detta utsnitt blir $\mathbf{F}(x, y, z) \cdot \hat{\mathbf{N}}(x, y, z)$ så flödet genom utsnittet är $\mathbf{F}(x, y, z) \cdot \hat{\mathbf{N}}(x, y, z) dS$. Detta är det intuitiva resonemanget bakom varför ytintegralen

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

kallas *flödesintegralen* av \mathbf{F} genom \mathcal{S} . Tidigare såg vi att för ytintegraler i allmänhet gäller att $dS = |\partial \mathbf{r} / \partial u \times \partial \mathbf{r} / \partial v| dudv$. Eftersom $(\partial \mathbf{r} / \partial u \times \partial \mathbf{r} / \partial v) / |\partial \mathbf{r} / \partial u \times \partial \mathbf{r} / \partial v|$ är en enhetsnormal till \mathcal{S} , får vi

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \pm \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) dudv,$$

där plus/minus väljs så att normalvektorn pekar åt önskat håll.

25 Divergens och rotation

Tänk på gradienten av en funktion som en operator som verkar på funktionen. Då är det rimligt att skriva $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ och behandla de abstrakta koefficienterna i denna vektor i kalkyler som om de vore vanliga tal. Detta sätt att tänka erbjuder bra minnesregler och bra beteckningar i följande definition. Låt \mathbf{F} vara ett glatt vektorfält.

Definition 25.1 Divergensen av \mathbf{F} ges av

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Rotationen av \mathbf{F} ges av

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

En omedelbar observation är att $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$. En annan är att om \mathbf{F} är konservativt gäller $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Divergensen av \mathbf{F} kan ses som en *utflödesintensitet*. Följande approximativa beräkningar motiverar detta. Låt B vara kotet av radie ϵ centrerat i origo, där ϵ är ett så litet att om man approximerar \mathbf{F} :s komponenters partiella derivator med deras värde i origo och komponenterna själva med sina tangenthyperplan i origo (dvs $\mathbf{F}(x, y, z) \approx \mathbf{F}(0, 0, 0) + x(\partial\mathbf{F}/\partial x)(0, 0, 0) + y(\partial\mathbf{F}/\partial y)(0, 0, 0) + z(\partial\mathbf{F}/\partial z)(0, 0, 0)$), så är approximationen mycket god. I räkningarna som följer skriver vi följaktligen inte ut argumentet till de partiella derivatorna, utan tar det som underförstått att de är evaluerade i origo. (Därmed är det underförstått att även $\nabla \cdot \mathbf{F}$ är evaluerad i origo.) Notera att p.g.a. symmetri gäller att såväl integralerna över B som ytintegralerna över randen \mathcal{S} till B (dvs sfären av radie ϵ), av funktionerna x , y , z , xy , xz och yz är 0. Vi får å ena sidan

$$\iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx dy dz \approx \nabla \cdot \mathbf{F} \iiint_B dx dy dz = \frac{4\pi}{3} \epsilon^3 (\nabla \cdot \mathbf{F}).$$

Å andra sidan ges utflödet ur B av ytintegralen $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$. Normalvektorfältet som har riktning ut ur B ges av $\hat{\mathbf{N}}(x, y, z) = \epsilon^{-1}(x, y, z)$. Därför gäller

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS &\approx \iint_{\mathcal{S}} \epsilon^{-1} \left(\mathbf{F}(0, 0, 0) + x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + z \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \right) \cdot (x, y, z) \, dS \\ &= \epsilon^{-1} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \iint_{\mathcal{S}} x^2 \, dS + \frac{\partial F_2}{\partial y} \iint_{\mathcal{S}} y^2 \, dS + \frac{\partial F_3}{\partial z} \iint_{\mathcal{S}} z^2 \, dS \right) \\ &= \frac{1}{3} \epsilon^{-1} (\nabla \cdot \mathbf{F}) \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2 + z^2) \, dS \\ &= \frac{1}{3} \epsilon (\nabla \cdot \mathbf{F}) \iint_{\mathcal{S}} dS \\ &= \frac{4\pi}{3} \epsilon^3 (\nabla \cdot \mathbf{F}). \end{aligned}$$

Resultaten blir alltså desamma:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx dy dz.$$

Detta gäller för ett klot, men eftersom varje begränsat område som innesluts av en orienterad yta kan approximeras godtyckligt väl av klot, anar vi följande resultat. Notera att man kallar en yta *sluten* om den ryms i en begränsad del av rummet och delar upp rummet i två disjunkta delar, varav en omsluts av ytan.

Sats 25.2 (Gauss divergenssats) *Låt \mathcal{S} vara en sluten orienterad yta och låt R vara den kropp som innesluts av \mathcal{S} . Antag att normalvektorfältet är riktat ut från R . Då gäller att*

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_R \nabla \cdot \mathbf{F} dx dy dz.$$

26 Greens formel och Stokes sats

Låt $D = [a, b] \times [c, d]$ vara en rektangel i xy -planet. Orientera D så att randen \mathcal{C} är riktad moturs, dvs så att $\hat{\mathbf{N}} = (0, 0, 1)$. Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ vara ett glatt vektorfält i xy -planet, som vi också kan se som $\mathbf{F} = (F_1, F_2, 0)$ i rummet när det är önskvärt. Randen \mathcal{C} är inte glatt, så för att beräkna $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ delar vi upp \mathcal{C} i de fyra sidorna av rektangeln, beräknar var för sig och summerar resultaten. Betrakta till exempel den högra sidan av rektangeln, säg \mathcal{C}_1 . En uppenbar parametrisering är $\mathbf{r}(t) = (b, t)$, $c \leq t \leq d$ och vi får

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_c^d F_2(b, t) dt.$$

Genom att behandla de andra tre delarna analogt, kommer man fram till

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_c^d F_2(b, t) dt + \int_a^b F_1(t, c) dt - \int_c^d F_2(a, t) dt - \int_a^b F_1(t, d) dt,$$

Betrakta nu dubbelintegralen

$$\iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dx dy$$

som i det här fallet blir

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

som vi genom att integrera den vänstra termen med x innerst och den högra med y innerst, ser ger samma resultat som kurvintegralen över \mathcal{C} . Eftersom ett godtyckligt område D som omges av en styckvis glatt rand kan approximeras godtyckligt väl av rektanglar, antar vi att följande gäller.

Sats 26.1 (Greens formel) *Låt \mathcal{C} vara en styckvis glatt sluten kurva i xy -planet, moturs orienterad och låt D vara det område i xy -planet som omsluts av \mathcal{C} . Då gäller att*

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

En följd av Greens formel tillämpad på $\mathbf{F} = (y, 0)$ är att $-\oint_{\mathcal{C}} y dx$ är lika med arean av D . Genom att byta \mathbf{F} till $(0, x)$ får man att $\oint_{\mathcal{C}} x dy$ också ger arean av D .

Faktum är att Greens formel inte kräver att D är ett område i xy -planet. Den generella varianten är:

Sats 26.2 (Stokes sats) *Låt \mathcal{C} vara en sluten styckvis glatt kurva i rummet och antag att \mathcal{S} är en glatt yta som har \mathcal{C} som rand och ett normalvektorfält $\hat{\mathbf{N}}$. Antag att \mathcal{C} är orienterad i enlighet med \mathcal{S} :s normalvektorfält. Då gäller att*

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$