Lösningsförslag till Tentamen
MVE470/MVE351, 2017-03-17

(1) (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{2}{x^2 y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4 + \frac{2}{x y^2}$

I punkten (1, 1) får vi $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 3$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 6$

$f(1,1) = 3$

Linjäriseringen av $f(x,y)$ i $(1,1)$ blir

$$\underline{L(x,y) = 3 + 3(x-1) + 6(y-1)}$$

$$f(1.01,\ 0.99) \approx L(1.01,\ 0.99) =$$
$$= 3 + 3(1.01-1) + 6(0.99-1) = \underline{2.97}$$

(b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{4}{x^3 y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{4}{x y^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{2}{x^2 y^2}$

Taylorpolynomet av grad 2 i punkten (1, 1) blir

$$\underline{P(1+h,\ 1+k)} = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)h + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)k +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)k^2\right)$$

$$= 3 + 3h + 6k + \frac{1}{2}(-4h^2 - 4hk - 4k^2) =$$

$$= \underline{3 + 3h + 6k - 2h^2 - 2hk - 2k^2}$$

(c) $r'(t) = (e^{3t/2}, e^t)$

Längden av kurvan ges av

$$\int_0^1 \|r'(t)\|\,dt = \int_0^1 \sqrt{(e^{3t/2})^2 + (e^t)^2}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{e^{3t} + e^{2t}}\,dt = \int_0^1 \sqrt{e^t + 1}\, e^t\,dt = \left| \begin{array}{l} \text{variabelbyte} \\ u = e^t + 1 \\ du = e^t dt \\ t=0 \Rightarrow u=2 \\ t=1 \Rightarrow u=e+1 \end{array} \right|$$

$$= \int_2^{e+1} \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_{u=2}^{u=e+1} = \underline{\frac{2}{3}\left((e+1)^{3/2} - 2^{3/2}\right)}$$

1d) $\operatorname{div} \mathbb{F} = \frac{\partial}{\partial x}(6x e^{3x^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\cos(y+3z)) + \frac{\partial}{\partial z}(3\cos(y+3z)) =$

$= 6e^{3x^2} + 6x \cdot e^{3x^2} \cdot 6x - \sin(y+3z) - 3\sin(y+3z)\cdot 3$

$= (6+36x^2)e^{3x^2} - 10\sin(y+3z)$

$\operatorname{curl} \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6xe^{3x^2} & \cos(y+3z) & 3\cos(y+3z) \end{vmatrix} =$

$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(3\cos(y+3z)) - \frac{\partial}{\partial z}(\cos(y+3z))\right) -$

$- \mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(3\cos(y+3z)) - \frac{\partial}{\partial z}(6x e^{3x^2})\right) +$

$+ \mathbb{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(\cos(y+3z)) - \frac{\partial}{\partial y}(6x e^{3x^2})\right) =$

$= \mathbf{i}\,(-3\sin(y+3z) + \sin(y+3z)\cdot 3) + 0\cdot\mathbf{j} + 0\cdot\mathbb{k} = 0$

Eftersom $\mathbb{R}^3$ är enkelt sammanhängande och $\operatorname{curl}\mathbb{F} = 0$ så blir vektorfältet konservativt.
Det är inte källfritt i $\mathbb{R}^3$, ty $\operatorname{div}\mathbb{F} \not\equiv 0$ i $\mathbb{R}^3$.

2 (a) Se kursboken eller anteckningar.

(b) En normalvektor till en nivåytan $f(x,y,z) = C$ i en punkt (a,b,c) på ytan ges av $\nabla f(a,b,c)$.

Vi får alltså att en normal till $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ i $(1,-1,2)$ blir

$\underline{N_1} = \nabla f(1,-1,2) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2-2yz+y^3), \frac{\partial}{\partial y}(x^2-2yz+y^3), \frac{\partial}{\partial z}(x^2-2yz+y^3)\right)\Big|_{(1,-1,2)} =$

$= (2x, -2z+3y^2, -2y)\big|_{(1,-1,2)} =$

$= \underline{(2, -1, 2)}$

En normal till $x^2+2y^2-z^2=-1$ i $(1,-1,2)$ ges av

$$\underline{N_2} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2+2y^2-z^2),\ \frac{\partial}{\partial y}(x^2+2y^2-z^2),\ \frac{\partial}{\partial z}(x^2+2y^2-z^2)\right)\Bigg|_{(1,-1,2)} =$$

$$= (2x,\ 4y,\ -2z)\Big|_{(1,-1,2)} = \underline{(2,-4,-4)}$$

Vi har

$$N_1 \cdot N_2 = (2,-1,2)\cdot(2,-4,-4) = 4+4-8 = 0$$

som visar att ytorna skär varandra under rät vinkel i $(1,-1,2)$

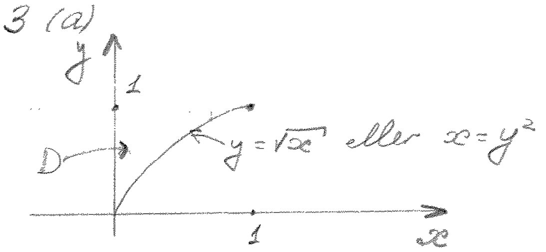
Tangentplanet till ytan $x^2-2yz+y^3=4$ i punkten $(1,-1,2)$ ges av

$$a(x-1)+b(y+1)+c(z-2)=0$$ där

(a,b,c) är en normal till ytan, dvs

$$\underline{2(x-1)-(y+1)+2(z-2)=0}$$

3 (a)



Området D är både x-enkelt och y-enkelt.

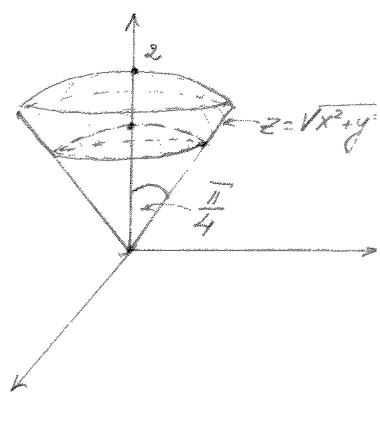
Som x-enkelt ges det av olikheterna $0\le y\le 1,\quad 0\le x\le y^2$

$$\iint_D e^{y^3}\,dA = \int_0^1\left(\int_0^{y^2} e^{y^3}\,dx\right)dy = \int_0^1 e^{y^3}\left(\int_0^{y^2} dx\right)dy = \int_0^1 e^{y^3}y^2\,dy =$$

$$= \left|\begin{array}{l}\text{variabelbyte}\\ t=y^3\\ dt=3y^2dy\\ y=0 \Rightarrow t=0\\ y=1 \Rightarrow t=1\end{array}\right| = \int_0^1 e^t\,\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}(e-1)$$

Svar: $\frac{1}{3}(e-1)$

(b) $$\text{Volymen} = \iiint_K dV = \left|\begin{array}{l}\text{Sfärisk substitution}\\ x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\varphi\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\\ 1\le\rho\le 2\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{array}\right.$$



$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/4} \left(\int_1^2 \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \right) d\varphi \right) d\theta = 2\pi \int_0^{\pi/4} \sin\varphi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_1^2 d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \cdot 7 \left[-\cos\varphi \right]_0^{\pi/4} = \frac{14\pi}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

<u>Svar</u>: $\frac{14\pi}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4. $f(x,y)$ är kontinuerlig på kurvan som är en sluten begränsad mängd i $\mathbb{R}^2$. Enligt en sats i kursen har f största och minsta värden kurvan.

De antas antingen i kurvans ändpunkter eller i punkter (x,y) där

$$(*) \begin{cases} \det \begin{bmatrix} \nabla f(x,y) \\ \nabla g(x,y) \end{bmatrix} = 0 & \text{med } g(x,y) = x^4 + y^4 - 1 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

(ekvivalent: (x,y,λ_0) är en kritisk punkt till Lagranges funktion

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

för något värde λ_0)

$$(*) \iff \begin{cases} \det \begin{bmatrix} a & b \\ 4x^3 & 4y^3 \end{bmatrix} = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} ay^3 = bx^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/3} x \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{4/3} x^4 + x^4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/3} x \\ x^4 = \frac{a^{4/3}}{b^{4/3} + a^{4/3}} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{b^{1/3}}{(b^{4/3} + a^{4/3})^{1/4}} \\ x = \frac{a^{1/3}}{(b^{4/3} + a^{4/3})^{1/4}} \end{cases} \quad (x \geq 0!)$$

Vi har $f\left(\frac{a^{1/3}}{(b^{4/3}+a^{4/3})^{1/4}}, \frac{b^{1/3}}{(b^{4/3}+a^{4/3})^{1/4}} \right) = \frac{a^{4/3} + b^{4/3}}{(a^{4/3} + b^{4/3})^{1/4}} =$

$$= (a^{4/3} + b^{4/3})^{3/4}$$

kurvans ändpunkter på x och y-axlarne och ges av $(0,1)$ och $(1,0)$

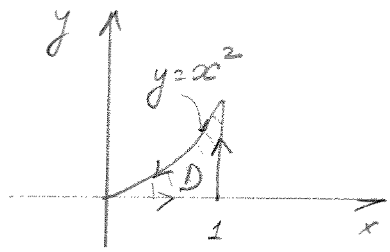
$f(0,1) = b$, $f(1,0) = a$

Eftersom både a och $b < (a^{4/3}+b^{4/3})^{3/4}$

blir $\underline{f_{max} = (a^{4/3}+b^{4/3})^{3/4}}$ och

$\underline{f_{min} = \min\{a, b\}}$

5. (a) Arbetet $= \oint_C \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = \left| \begin{matrix}\text{Greens}\\ \text{formel}\end{matrix} \right| = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(-y\sin(x^3))\,dA$



$$= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \sin(x^3)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \sin(x^3)\cdot x^2\,dx = \left| \begin{matrix}\text{Variabelbyte}\\ t = x^3\\ dt = 3x^2dx\end{matrix} \right|$$

$$= \int_0^1 \sin t\,\frac{dt}{3} = \underline{\frac{1}{3}(1-\cos 1)}$$

Svar: $\frac{1}{3}(1-\cos 1)$

(b) Parametrisera $-\gamma$ enligt $\mathbf{r}(x) = (x, x^2)$
$x \in [0,1]$

$$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{-\gamma} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_0^1 \mathbb{F}(\mathbf{r}(x))\cdot \mathbf{r}'(x)\,dx =$$

$$= -\int_0^1 (-x^2\sin(x^3)\mathbf{i} + x^4\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i}+2x\mathbf{j})\,dx =$$

$$= -\int_0^1 (-x^2\sin(x^3) + 2x^5)\,dx = \frac{1}{3}(1-\cos 1) - \frac{1}{3} = -\frac{\cos 1}{3}$$

Svar: $-\frac{\cos 1}{3}$

6 (a) Direkt gränsövergång ger $\frac{0}{0}$.

Vi undersöker hur funktionen $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ beter sig om (x,y) går mot 0 längs x- och y-axlarna:

$f(x,0) = \frac{x^2}{x^2+0^2} = 1 \to 1$ då $x \to 0$

$f(0,x) = 0 \to 0$ då $x \to 0$.

Därmed saknar f gränsvärdet då $(x,y) \to (0,0)$

(b) Eftersom $\frac{\sin t}{t} \to 1$ då $t \to 0$ och $x^2+y^2 \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$,

ger sammansättningsregeln att

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ existerar och lika med 1

Produktregeln ger nu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0 \cdot 1 = 0$

Eftersom $0 \le \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \le |x|$

och $|x| \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$

blir $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$

(enligt instängningsregeln)

Detta ger att $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(x^2+y^2)+x^3}{x^2+y^2}$ existerar och $= 0$

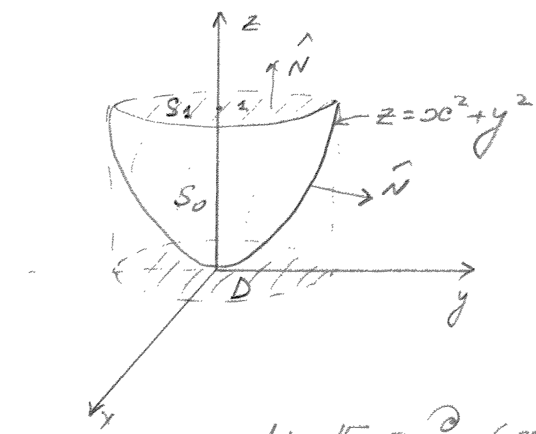
$f(x,y) = \frac{x\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ är kontinuerlig i alla punkter $(x,y) \neq (0,0)$

Sätt $f(0,0) = 0$.

Eftersom $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0$ vi får att

$f(x,y)$ är kontinuerlig i hela $\mathbb{R}^2$.

7.



(a) Enligt divergenssatsen blir flödet

$$= \iiint_K \operatorname{div} \mathbb{F}\, dV$$

där $K = \{(x,y,z) : 1 \geq z \geq x^2+y^2\}$

$$\operatorname{div} \mathbb{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(1) = 2z$$

$$\iiint_K 2z\, dV = 2\iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{1} z\, dz \right) dx\,dy = 2\iint_D \frac{1}{2}\left(1-(x^2+y^2)^2\right) dx\,dy$$

(D är cirkelskivan $x^2+y^2 \leq 1$
Det är lämpligt att gå över till polära koord: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) $= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1-r^4) r\, d\varphi \right) dr =$

$$= 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^6}{6} \right) \Big|_{r=0}^{r=1} = \frac{2\pi}{3}$$

Svar: $\frac{2\pi}{3}$

(b) Man kan t.ex använda resultat i (a) och få

$$\iint_{S_0} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{S} = \underbrace{\iint_{S} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{S}}_{\frac{2\pi}{3}} - \iint_{S_1} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{S}$$

, där S_1 är den del av S som ges av $z = 1$, $x^2+y^2 \leq 1$
Enhetsnormalen till S_1 ges av $\hat{N}(x,y,z) = \mathbb{k}$
och $\iint_{S_1} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbb{F}(x,y,z)\cdot \hat{N}(x,y,z)\, dS =$

$$= \iint_{S_1} (xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + \mathbb{k})\cdot \mathbb{k}\, dS = \iint_{S_1} dS = \text{arean av } S_1 = \pi.$$

Detta ger att $\underline{\iint_{S_0} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{S} = \frac{2\pi}{3} - \pi = -\frac{\pi}{3}}$