Lösningsförslag till tentan
i Flervariabelanalys, 2017-06-09
MVE 470/MVE 351

1 (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2$

$\nabla f(1,1) = (2,3)$

$f'_u(1,1) = (2,3)\cdot\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1+\sqrt{3}$

Obs! $\|u\| = 1$.

Svar: $1+\sqrt{3}$

(b) $\frac{\partial f}{\partial x} = -4y-4x^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -4y-4x$

I $(1,-1)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = 0$

som visar att $P=(1,-1)$ är en kritisk punkt.

Vidare, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$

och $\mathcal{H}(1,-1) = \begin{bmatrix} -12 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$

Eftersom $\det \mathcal{H}(1,-1) > 0$ och $-12<0$
blir $(1,-1)$ en lokal maximipunkt.

(c) $f(1,3,2) = 2$, dvs $(1,3,2)$ ligger på nivåkurvan.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2-6xy+z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2+x$

$\nabla f(1,3,2) = (-13, -3, 13)$

Tangentplanets ekvation blir då

$\underline{-13(x-1) - 3(y-3) + 13(z-2) = 0}$

Normallinjen ges av

$\begin{cases} x-1 = -13t \\ y-3 = -3t \\ z-2 = 13t \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} x = 1+13t \\ y = 3-3t \\ z = 2+13t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

(d) Partikelns hastighet ges av

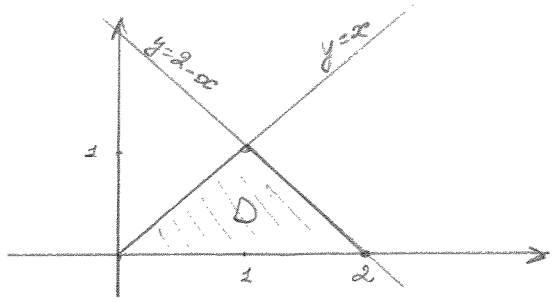
$\mathbf{r}'(t) = (-2\cos t\sin t, 3-3t^2, 1)$

Den är $(0,3,1)$ då $\begin{array}{l} -2\cos t \sin t = 0 \\ 3-3t^2 = 3 \end{array}$. Detta ger $t=0$

Partikelns acceleration i $t=0$ är

$$\mathbf{r}''(t)\Big|_{t=0} = (-2\cos 2t, -6t, 0)\Big|_{t=0} = (-2,0,0).$$

2. (a)



D är ett y-enkelt område som ges av
$0 \le y \le 1, \quad y \le x \le 2-y$

$$\iint_D xy^2\,dA = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} xy^2\,dx \right) dy = \int_0^1 y^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_y^{2-y} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 y^2\left((2-y)^2 - y^2\right)dy = \dots = \frac{1}{6}$$

(b)
$$\text{Volymen} = \int_1^2 \left(\int_{x^2+y^2 \le z} dx\,dy \right) dz =$$

$$= \int_1^2 \underbrace{\pi z}_{\substack{\text{arean} \\ \text{av cirkelskivan} \\ x^2+y^2\le z}}\, dz = \pi \left[\frac{z^2}{2} \right]_1^2 = \frac{3\pi}{2}$$

3. Kurvan är ett slutet begränsat område
($x^4 + x^2y^2 + 2y^4 = 1 \Rightarrow x^4 \le 1, \; 2y^4 \le 1$
i.e $x \in [-1,1], \; y \in \left[-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right]$)

Vi måste bestämma största och minsta värdena av $f(x,y) = x^2+y^2$
under tivillkoret $g(x,y) = x^4 + x^2y^2 + 2y^4 - 1 = 0$.
Enligt Lagranges sats, finns maximi/minimi-punkterna bland lösningar till systemet

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \nabla f(x,y) \\ \nabla g(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 4x^3+2xy^2 & 2x^2y+8y^3 \end{vmatrix} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(3y^2-x^2)=0 \\ x^4+x^2y^2+2y^4-1=0 \end{cases}$$

1^a ekv ger $x=0$ eller $y=0$ eller $x=\pm\sqrt{3}y$

Om $x=0$ ger den 2^a ekv $y=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Om $y=0$ —"— $x=\pm 1$

Om $x=\pm\sqrt{3}y$ —"— $9y^4+3y^4+2y^4=1$ dvs $y=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{14}}$

$f(0,\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}})=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(\pm 1, 0)=1$

$f(\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{14}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{14}})=\frac{3}{\sqrt{14}}+\frac{1}{\sqrt{14}}=\frac{4}{\sqrt{14}}>1$

Vi har alltså $f_{max}=\frac{4}{\sqrt{14}}$, $f_{min}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

och det största avståndet från kurvan till origo $=\frac{2}{\sqrt[4]{14}}$

och det minsta $=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

4. (a) Se kursboken.

(b) En potential Φ till F fås ur

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial x}=2xyz-6x\sin y \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=x^2z-3x^2\cos y \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}=x^2y+e^z \end{cases}$$

Ur 1^a ekv. fås $\Phi(x,y,z)=x^2yz-3x^2\sin y+C(y,z)$

Genom att sätta in uttrycket i 2^a ekv

fås $x^2z-3x^2\cos y+C'_y(y,z)=x^2z-3x^2\cos y$

varav $C'_y(y,z)=0$ och $C(y,z)=D(z)$ (oberoende av variabeln y)

Insättningen av $\Phi(x,y,z)=x^2yz-3x^2\sin y+D(z)$ i den 3^e ekvationen ger nu

$x^2y+D'(z)=x^2y+e^z$ varav

$D'(z) = e^z$ och $D(z) = e^z + \text{konst}$

Vi får alltså lösningarna

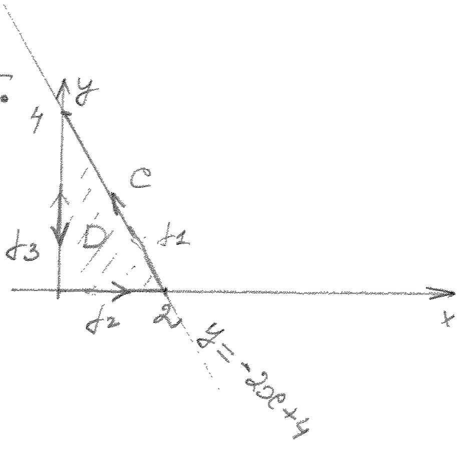
$$\varphi(x,y,z) = x^2yz - 3x^2\sin y + e^z + \text{konst}$$

<u>Svar</u> $\varphi(x,y,z) = x^2yz - 3x^2\sin y + e^z$ är en potential till F

(b) Arbetet $= \varphi(1,1,1) - \varphi(0,0,0) =$

$= 1 - 3\sin 1 + e - 1 = \underline{e - 3\sin 1}.$

5.



Låt C vara positivt orienterad

$C = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$

$-\gamma_1$ parametriseras enligt

$\mathbf{r}_1(t) = (t, -2t+4), \quad t \in [0,2]$

γ_2 ges av

$\mathbf{r}_2(t) = (t, 0), \quad t \in [0,2]$

$-\gamma_3$ ges av

$\mathbf{r}_3(t) = (0, t), \quad t \in [0,4]$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} =$$

$$= -\int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t))\cdot \mathbf{r}_1'(t)\,dt + \int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t))\cdot \mathbf{r}_2'(t)\,dt - \int_0^4 \mathbf{F}(\mathbf{r}_3(t))\cdot \mathbf{r}_3'(t)\,dt$$

$$= -\int_0^2 ((-2t+4)^2\mathbf{i} + t\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i} - 2\mathbf{j})\,dt + \int_0^2 (0\mathbf{i} + t\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i} + 0\cdot\mathbf{j})\,dt -$$

$$-\int_0^4 (t^2\mathbf{i} + 0\cdot\mathbf{j})\cdot(0\mathbf{i} + \mathbf{j})\,dt =$$

$$= -\int_0^2 ((4-2t)^2 - 2t)\,dt = -\left[\frac{(4-2t)^3}{-2\cdot 3}\right]_0^2 - t^2\Big|_0^2 = -\frac{20}{3}$$

(b) Enligt Greens formel blir

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D (1-2y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^{4-2x} (1-2y)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^2 [y - y^2]_0^{4-2x}\, dx = \int_0^2 (4 - 2x - (4-2x)^2)\, dx = \ldots = -\frac{20}{3}$$

Vi har $\mathbb{F}(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} i + \frac{\partial \varphi}{\partial y} j = y^2 i + 2yx\, j$.

6. Fältlinjerna bestäms ur dif. ekvationen

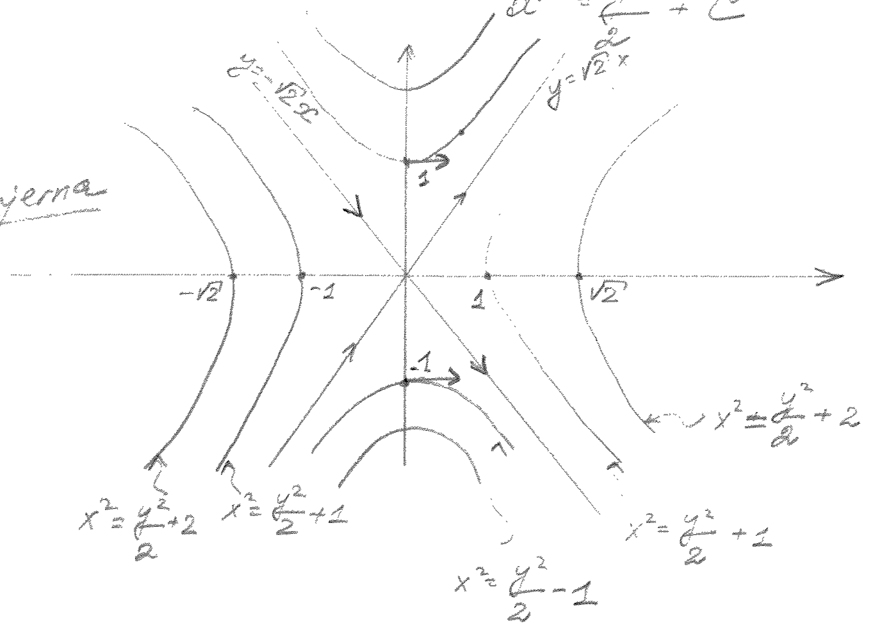
$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{2yx} \iff 2x\, dx = y\, dy$$

varav

$$x^2 = \frac{y^2}{2} + C$$

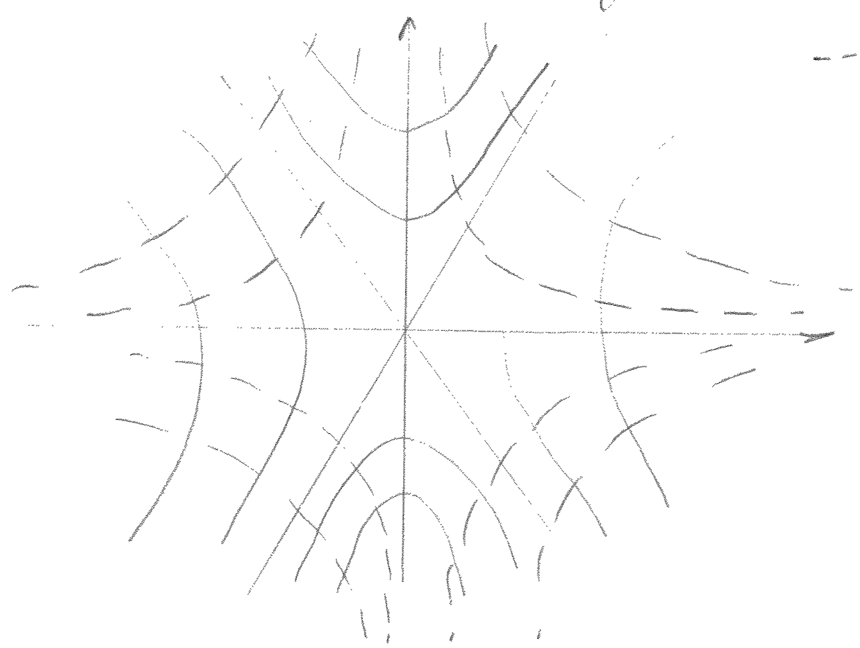
Om $C = 0$ så $x^2 = \frac{y^2}{2}$ dvs $y = \pm\sqrt{2}\, x$

Fältlinjerna



Nivåkurvorna ges av $\varphi(x,y) = C$

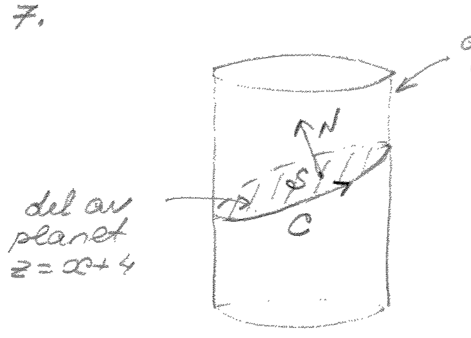
dvs $xy^2 = C$



- - - - nivåkurvorna

Fältlinjerna är ortogonala mot nivåkurvorna.

7.



Vi väljer orienteringen av C som på bilden

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & 4x & 5y \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}\cdot 5 + \mathbf{j}\cdot 2 + \mathbf{k}\cdot 4$$

S parametriseras enligt

$$\mathbf{r}(x,y) = (x, y, x+4), \quad x^2+y^2 \le 4$$

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - 0\cdot\mathbf{j} + \mathbf{k} \leftarrow \text{pekar uppåt}$$

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{x^2+y^2\le 4} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y)\,dx\,dy = -\iint_{x^2+y^2\le 4} dx\,dy =$$

$$= -\text{arean av } x^2+y^2\le 4 = -4\pi$$

(b) $$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = (\text{divergenssatsen}) = \iiint_B \operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{F})\,dV$$

där B är klottet vars rand är S.

Eftersom $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{F}) = 0$ (en sats i boken)

blir

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 0.$$