Tentamen
MVE470/MVE351 Flervariabelanalys, K/Kf/Bt/Ki

2017-03-17 14.00 - 18.00

Examinator: Lyudmila T, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Lyudmila Turowska, telefon: 5341

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt. Bonuspoäng från duggor 2016 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (10p)

2. Bestäm normalvektorer till ytorna $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ och $x^2 + 2y^2 - z^2 = -1$ i $(1, -1, 2)$ samt visa att ytorna skär varandra under rät vinkel i $(1, -1, 2)$. Bestäm tangentplanet till ytan $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ i punkten $(1, -1, 2)$. (5p)

3. (a) Beräkna dubbelintegralen (3p)

$$\iint_D e^{y^3} dA$$

där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$ (Tips: tänk på integrationsordning).

(b) Beräkna volymen av den kropp K som begränsas av den koniska ytan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och sfärerna $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, dvs $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ (Tips: sfärisk substitution). (3p)

4. Bestäm största och minsta värdena för $f(x, y) = ax + by$ där a och b är positiva konstanter på den del av kurvan $x^4 + y^4 = 1$ som ligger i första kvadranten. Glöm inte undersöka ändpunkterna. (5p)

5. Betrakta vektorfältet $\boldsymbol{F}(x, y) = -y \sin(x^3)\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j}$.

(a) Beräkna m h a Greens formel arbetet som $\boldsymbol{F}$ uträttar längs randen C positivt orienterad till området D som ges av $0 \leq y \leq x^2$, $0 \leq x \leq 1$. (3p)

(b) Beräkna $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, där γ är den del av randen C som ligger på parabeln $y = x^2$ (Tips: använd resultat i (a)). (3p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Avgör om följande gränsvärdena existerar eller ej och bestäm i förekommande fall deras värde (tydlig motiveringen krävs!) (6p)

$$(a) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} \qquad (b) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(x^2+y^2)+x^3}{x^2+y^2}.$$

Finns det en kontinuerlig funktion f definierad i hela $\mathbb{R}^2$ sådan att $f(x,y) = \frac{x\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ då $(x,y) \neq (0,0)$?

7. Betrakta vektorfälet $\boldsymbol{F}(x,y,z) = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Låt S vara ytan vilken utgör randen till kroppen i $\mathbb{R}^3$ som ges av olikheterna $1 \geq z \geq x^2+y^2$. Ytan S är orienterad med utåt pekande normalen (6p)

(a) Med hjälp av divergenssatsen beräkna flödet av $\boldsymbol{F}$ ut genom S. (3p)

(b) Beräkna flödesintegral $\iint_{S_0} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}$, där S_0 är den del av S som ligger på paraboloiden $z = x^2+y^2$. (3p)

8. Definiera begreppen gradient och riktningsderivata för en funktion av två variabler. Bevisa sedan att om f är differentierbar i (a,b) och $\nabla f(a,b) \neq 0$ så är $\nabla f(a,b)$ en normal till nivåkurvan $f(x,y) = f(a,b)$. Visa också att i punkten (a,b) växer f snabbast i riktningen $\nabla f(a,b)$. (6p)

Lycka till!
Lyudmila T

Anonym kod	MVE470/MVE351 Flervariabelanalys, K/Kf/Bt/Ki	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, gärna på detta blad.

(a) Låt $f(x,y) = x + 4y - \frac{2}{xy}$. Bestäm linjäriseringen av f i $(1,1)$ och beräkna ett approximativt värde för $f(1.01, 0.09)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) För f i (a) bestäm Taylorpolynomet av grad 2 i $(1,1)$. . (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Beräkna längden av kurvan parametriserad av $\boldsymbol{r}(t) = (\frac{2}{3}e^{3/2t}, e^t)$, $t \in [0,1]$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna divergensen och rotationen för vektorfältet $\boldsymbol{F}(x,y,z) = 6xe^{3x^2}\boldsymbol{i} + \cos(y + 3z)\boldsymbol{j} + 3\cos(y+3z)\boldsymbol{k}$. Är vektorfältet konservativt? Är det källfritt? (3p)

Lösning:

Svar: ....