MVE470/MVE351, Flervariabelanalys, läsåret 2017/18
Vecko–PM läsvecka 2

Adams: 12.5 - 12.7, 12.9

Kapitel 12 handlar om funktioner av flera variabler. I veckans avsnitt skall vi arbeta med en del begrepp som är välkända från envariableanalysen men nu i en mer generell tappning. I huvudsak handlar det om att derivera funktioner av flera variabler och använda derivata för att på olika sätt beskriva och approximera sådana funktioner. Derivatan av en reellvärd funktion $f(x)$ av en variabel i en punkt x_0 mäter hur ”snabbt/långsamt” funktionsvärdena förändras i en omgivning av x_0 och man vill att derivatan skall ha samma betydelse även för funktioner $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ av flera variabler. Det är dock inte givet hur man skall mäta denna förändring eftersom vi i omgivning av en punkt i $\mathbb{R}^n$ har oändligt många riktingar att ta hänsyn till. De *partiella derivatorna* mäter förändringshastigheten i axelparallella riktingar och med dessa, samlade i en vektor som kallas *gradienten*, kan vi sedan enkelt bestämma förändringshastigheten i alla andra riktingar genom s.k. *riktningsderivata*. I många situationer behöver man kunna hantera sammansättningar av funktioner, t.ex. vid variabelbyten, och för att derivera sådana sammansättningar finns en *kedjeregel*, liknande den för funktioner av en variabel. Första ordningens derivator innehåller värdefull information om en funktions beteende och med dess hjälp kommer vi bl.a. beräkna approximativa funktionsvärden, genom *linjäriseringen* eller *differentialen*, och bestämma *tangentplan* till funktionsytor och nivåytor. Vi kommer införa begreppet *differentierbar* vilket är den naturliga motsvarigheten till deriverbarhet för funktioner av en variabel.Vi skall även studera högre ordningens derivator och bl.a. se hur dom i *Taylorutveckling* tillsammans kan kombineras för att ge en bättre approximation av en funktion än vad linjärisering ger. Mycket av den naturvetenskapliga och tekniska forskningen under det förra århundratet präglades av linjära approximationer av mer komplexa problem. Mycket talar för att man i framtiden kommer behöva mer nogranna analyser som bygger på högre ordningens approximationer.

Adams: 13.7

Avsnittet handlar om Newtons metod för att lösa icke-linjära ekvationssystem. Motsvarande metod i en variabel torde vara bekant för alla och generaliseringen till flera variabler har stora likheter. Metoden gås igenom lite kort på föreläsning men examineras endast genom studioövning 3 och motsvarande uppgifter i Maple TA.

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
12.5	1, 3, 7, 11, 15	19, 31	21, 24, 33
12.6	1, 5, 7, 17, 19	11, 18	21, 25
12.7	3, 5, 7, 11, K3, K4	17, 19, 21a-d	20, 21e, 27, 29
12.9	1, 5, 7 (grad 2 räcker)		

Demo-uppgifter:

12.3.4, 12.3.22, 12.4.10, 12.5.6, 12.5.17, 12.6.8, 12.6.20, 12.7.6, 12.7.8, 12.7.12

Veckans studioövning

Denna andra studioövning handlar om linjärisering av funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$. Bland annat skall vi plotta tangentplan och normallinjer till funktionsytor och förstå hur linjäriseringen kan hanteras i Matlab och bl.a. användas för approximationer. Detta görs huvudsakligen med kommandon ni känner igen sedan förra veckan eller tidigare. Linjärisering av funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ behöver ni också kunna inför nästa veckas studioövning, då vi skall jobba med Newtons metod i flera variabler. I de flesta uppgifter krävs det att ni först bestämmer derivator och uttryck för hand (med penna och papper) innan ni ger er i kast med kommandon i Matlab.

Lärmål:

För att uppnå godkäntnivå på kursen förväntas att du kan:

Adams	Mål
12.4 12.5	beräkna partiella derivator, både av första och högre ordning, genom att tillämpa deriveringsregler för funktioner av en variabel, inklusive kedjeregeln.
12.6	beräkna linjäriseringen och differentialen för en reellvärd funktion och utnyttja dessa till approximativ beräkning av funktionsvärden.
12.6	beräkna Jacobimatrisen och differentialen för en vektorvärd funktion och utnyttja denna till approximativ beräkning av funktionsvärden.
12.7	beräkna gradient och riktningsderivata $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a})$ då $\|\mathbf{u}\| = 1$ (med sats 12.7.7) till en funktion av två eller tre variabler samt utnyttja deras egenskaper (se def. 12.7.7, markerad ruta s 718) vid problemlösning (se t.ex. exempel 3 och 4).
12.7	bestämma ekvationer för tangentlinje och normallinje till nivåkurva samt tangentplan och normallinje till nivåyta (se sats 12.7.6 och t.ex. exempel 6).
12.9	beräkna taylorpolynom av ordning två, till funktioner av två variabler, både genom att utgå från Taylors formel och genom att utnyttja kända Taylorpolynom i en variabel (jmf. exempel 1 och 2).

För överbetyg förväntas också att du kan:

Adams	Mål
12.6	definiera begreppet differentierbar funktion .
12.6	redogöra för relationerna mellan egenskaperna för en funktion: kontinuerlig, kontinuerliga partiella derivator samt differentierbar
12.6	formulera och bevisa kedjeregeln för $g \circ f$ då $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ och $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ samt formulera kedjeregeln på matrisform för $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ då $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och $\mathbf{g} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ (se sid. 709) .
12.7	definiera begreppen gradient och riktningsderivata, redogöra för och bevisa deras egenskaper (sats 12.7.6, sats 12.7.7 samt markerad ruta s 718) .

Kompletterande uppgifter:

(K3) Bestäm normallinjen till den nivåkurva till funktionen $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ som går genom punkten $(1, 2)$

(K4) Bestäm normallinjen till den nivåyta till funktionen $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$ som går genom punkten $(1, -1, 1)$