MVE470/MVE351, Flervariabelanalys, läsåret 2017/18
Vecko–PM läsvecka 3

Adams: 13.1 - 13.3

Kapitel 13 handlar om tillämpningar på derivata. Framför allt kommer vi se hur derivata kan användas för att lösa olika typer av optimeringsproblem, som beskrivs med funktioner av flera variabler.

I avsnitt 13.1 ges tillräckliga villkor för existensen av extremvärden (max/min) och där beskrivs också var man skall leta för att finna dessa extremvärden. Lokala extremvärden kan t.ex. finnas i s.k. *stationära punkter*, där de partiella derivatorna är 0. Ofta kan man avgöra om en sådan stationär punkt är lokalt maximum eller minimum genom att studera funktionens andraderivator. I avsnitt 13.1 finns enkla kriterier för detta.

I avsnitt 13.2 och 13.3 skall vi gå vidare och se hur man kan hitta ev. *globala extrempunkter* dvs. det största och minsta värde som en funktion antar på ett givet område Ω. Sådana extremvärden behöver inte alltid existera men i förekommande fall finner vi dom antingen i det inre av området eller på randen av området. Vi behöver då också studera hur man kan bestämma största och minsta värde av en funktion (en s.k. målfunktion) under bivillkor. För detta finns lite olika tekniker/metoder bl.a. Lagrange multiplikatormetod som introduceras i avsnitt 13.3.

Adams: 14.1 - 14.3

De första läsveckorna i kursen handlade i huvudsak om derivering av funktioner av flera variabler och hur dessa derivator kan användas för att lösa/analysera olika typer av problem. De återstående veckorna kommer istället handla mycket om integrering av funktioner av flera variabler.

Vi skall bygga vidare på teorin från envariabelanalysen och se hur man genom s.k. *dubbelintegraler* kan integrera funktioner av två variabler och med hjälp av detta t.ex. beräkna volym och massa av kroppar i rummet. Definitioner och viktiga räkneregler finns i avsnitt 14.1.

En dubbelintegral kan ibland beräknas för hand genom s.k. *upprepad enkelintegration* dvs. genom två integrationer efter varandra (först i x-led och sedan i y-led, eller vice versa), av den typ vi redan känner till från en variabel. När vi integrerade funktioner av en variabel var det egentligen aldrig några svårigheter med integrationsgränserna, utan vi ägnade den mesta av tiden åt olika typer av integrationstekniker. Samma integrationstekniker kommer vi använda i flera variabler men nu är det inte alltid lika enkelt att bestämma integrationsgränserna. Avsnitt 14.3 handlar om *generaliserade dubbelintegraler* och *medelvärdessatsen* för dubbelintegraler.

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
13.1	3, 5, K5a-c	7, 9, 22, 24, K5d	17, 29
13.2	1, 7	3, 5	11
13.3	1, 2, 3, 9	5	7, 11, 13, 22, 23, 27
14.1	13	15, 17	
14.2	1, 3, 5, 19	9, 13	11, 15, 25, 27, 30
14.3	3	7, 10, 14	17, 21

Demo-uppgifter:

13.1.4, 13.1.11, 13.2.9, 13.3.6, 14.1.14, 14.2.10, 14.2.17, 14.3.9

Veckans studioövning

Denna tredje studioövning handlar om *Newtons metod* för lösning av icke-linjära ekvationssystem. Detta är en iterationsmetod med numeriska beräkningar som successivt närmar sig en lösning på systemet. Det blir inte så många nya kommandon utan mer av sådant vi gjorde i studioövning 1 och 2, som att plotta nivåkurvor och linjärisera.

Lärmål:

För att uppnå godkäntnivå på kursen förväntas att du kan:

Adams	Mål
13.1	definiera begreppen lokalt maximum/minimum, sadelpunkt, globalt maximum/minimum, kritisk punkt och singulär punkt.
13.1	bestämma kritiska/stationära punkter för $f(x,y)$, där ekvationssystemet $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$ är relativt enkelt samt klassificera de kritiska punkterna med hjälp av sats 13.1.3 eller remark s 750.
13.2 13.3	tillämpa sats 13.1.1 och sats 13.1.2 för att bestämma största och minsta värde på kompakt mängd för $f(x,y)$, då det är relativt enkelt att bestämma kritiska punkter samt största/minsta värde på randen.
13.3	bestämma extremvärden för $f(x,y)$, eller $f(x,y,z)$ under bivillkor $g(x,y) = 0$, eller $g(x,y,z) = 0$, med Lagranges multiplikatormetod då den leder till relativt enkelt ekvationssystem.
14.1	känna till och utnyttja dubbelintegralens egenskaper (sid 811) vid problemlösning
14.2	beräkna dubbelintegral genom upprepad enkelintegration (sats 14.2.2).
14.3	avgöra huruvida en integral är generaliserad och i så fall förklara vad som gör den generaliserad.
14.3	beräkna generaliserad dubbelintegral för $f(x,y) \geq 0$ och därigenom avgöra konvergens/divergens.
14.3	veta vad som menas med medelvärdet av en funktion av två eller tre variabler på ett område.

För överbetyg förväntas också att du kan:

Adams	Mål
13.1	bestämma kritiska/stationära punkter för $f(x,y)$, där ekvationssystemet $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$ är mer komplicerade, samt klassificera de kritiska punkterna med hjälp av taylorutveckling av andra ordningen (se t.ex exempel 13.1.5).
13.2 13.3	lösa problem enligt godkäntmålen där ekvationssystemen inte är lika enkla, eller dimensionen > 2, eller flera bivillkor.
13.3	motivera Lagranges multiplikatormetod
14.1	förklara vad det innebär att f är integrerbar över ett rektangulärt område i planet (s 808 och 809) och utnyttja Riemannsummor för att approximera värdet på en integral (se t.ex ex.1 s 809).
14.1	utnyttja symmetrier vid beräkning av dubbelintegraler (se t.ex ex.3 s 811).
14.3	formulera och bevisa medelvärdessatsen (sats 14.3.3) för dubbelintegraler.

(K5) Avgör vilka av följande punkter som är kritiska resp singulära till funktionen $f(x,y) = x|y| - x$

a) $(1,1)$

b) $(1,0)$

c) $(0,1)$

d) $(0,0)$