MVE470/MVE351, Flervariabelanalys, läsåret 2017/18
Vecko–PM läsvecka 5

Adams: 8.2, 11.1, 11.3

I **11.1** introduceras begreppen *vektorvärd funktion* av en reell variabel. Här är det bättre att tänka på elementen i $\mathbb{R}^n$ som *punkter* istället för *vektorer*. Om f är en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}^2$ så har vi för varje reellt tal t en punkt $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ i planet. Då t genomlöper ett intervall på t-axeln kommer punkterna $(x(t), y(t))$ att genomlöpa en *kurva* i planet, och funktionen $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ sägs vara en *parametrisering* av denna kurva. Derivering sker koordinatvis vilket leder till ett antal deriveringsregler (se sid 628). Derivatan har många viktiga tillämpningar. De vi tar upp här är hastighet och acceleration i 11.1 och kurvlängd i 11.3. I avsnitt 8.2 och 11.3 kommer vi också träna en del på att bestämma parametrisering till givna kurvor, främst i planet men även i rummet.

Adams: Kapitel 15.1-15.4

Denna vecka riktar vi också vår uppmärksamhet åt kapitel 15 som till stor del handlar om *vektorfält* och dess tillämpningar. Vektorfält dyker upp naturligt inom många områden (se sid 860) t.ex. för att beskriva olika typer av krafter (gravitation, magnetiska, elektrostatiska mm) eller flöden (av vätska, gas, energi mm). Per definition är ett vektorfält (i rummet) en funktion $\mathbf{F}$ från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ och en naturlig tolkning är att $\mathbf{F}(x, y, z)$, som alltså är en vektor i $\mathbf{R}^3$, beskriver hastigheten hos en partikel i ett visst flöde som befinner sig i punkten (x, y, z). En partikel som rör sig i rummet med en hastighet som bestäms av ett visst vektorfält följer en kurvbana som kallas *fältlinje* (även kallad strömlinje eller kraftlinje, beroende på sammanhang).

I avsnitt 15.2 skall vi studera en speciell klass av vektorfält som kallas *konservativa*. Det är vektorfält $\mathbf{F}$ som är gradienten av någon reelvärd funktion $\phi(x, y, z)$ dvs. $\mathbf{F} = \nabla\phi$. Funktionen ϕ sägs i så fall vara en (skalär) *potential* till vektorfältet. Som vi skall se har sådana konservativa vektorfält flera användbara egenskaper, och de spelar en viktig roll i teorin om vektorfält. Avsnitt 15.3 och 15.4 innehåller några viktiga tillämpningar. I avsnitt 15.3 skall vi se hur man kan beräkna massa och tyngdpunkt av en tunn (krökt) tråd som är belagd med en given (varierande) densitet och i avsnitt 15.4 skall vi se hur man med en s.k. *kurvintegral* (även kallad linjeintegral) kan beräkna det arbete som ett visst kraftfält utför på en partikel som rör sig utefter en given kurva i rummet.

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
8.2	1, 3, 5, 7		
11.1	1, 2, 11	7, 13	15, 17, 21, 22
11.3	1, 7, 13, 14, K9, K10	3, 4, 17 , K8	5, 19
15.1	3, 6 (rita fältet, fältlinjer och nivåkurvor till $f(x, y) = x^2 - y$ i samma fig.)		
15.2	1, 3, 4, 5		9
15.3	1, 2, 3, 7	9	
15.4	1, 3, 5, 14,	7, 9, 15, 17, CR.7	21, 22, 23

Demo-uppgifter:

11.1.5, 11.1.10, 11.1.16, 11.3.11, 11.3.20, 15.1.5, 15.2.2, 15.3.11, 15.4.2, 15.4.4

Veckans studioövning

Denna vecka skall ni jobba med ett kemiprojekt (jämvikt – fettlösliga fenoler). Projektet ingår som obligatoriskt moment i kursen Kemi med biokemi KBT250/255/260. Undervisningen sker dock på schemalagd studiotid för flervariabelkursen MVE470, och med labbhandledare från MVE470. Kemiprojektet examineras enbart som del av kemikursen och ingår alltså inte som moment i MVE470.

Lärmål:

För att uppnå godkäntnivå på kursen förväntas att du kan:

Adams	Mål
11.1	derivera vektorvärda funktioner av en variabel genom tillämpning av deriveringsreglerna (sats 11.1.1), och m.h.a. dessa bl.a. bestämma kurvtangent, hastighet- och accelerationsvektor, samt fart till en partikel med given positionsvektor.
8.2 & 11.1	skissa plana kurvor utgående från given parametrisering.
8.2, 11.1, 11.3	bestämma parametrisering av sträckor i planet och rummet samt cirkelbågar, ellipser och funktionskurvor i planet. Du skall även i enklare fall kunna parametrisera skärningskurvor mellan ytor.
11.3	förklara vad som menas med båglängdselement och beräkna längden av kurvor
11.3	förklara vad som menas med enkel sluten kurva, samt vad som menas med orientering av en kurva
15.1	skissa ett vektorfält i planet, skissa fältlinjer till det och redogöra för sambandet mellan vektorfält och fältlinjer.
15.2	definiera begreppet *konservativt vektorfält i ett område* och beräkna *potential* till ett konservativt fält.
15.2	känna till nödvändiga villkor för att ett vektorfält skall vara konservativt (sid 868) och med hjälp av dessa kunna visa att ett givet vektorfält inte är konservativt.
15.2	förklara sambandet mellan nivåkurvor till potential och fältlinjerna till ett konservativt vektorfält.
15.3	definiera begreppet *kurvintegral av en funktion* och beräkna sådana integraler genom parametrisering av kurvan.
15.4	definiera begreppet *kurvintegral av ett vektorfält* och beräkna sådana integraler genom parametrisering av kurvan.
15.4	tillämpa satsen om kurvintegralers oberoende av integrationsvägen.
15.3-4	tillämpa kurvintegral för att bl.a. bestämma längd och massa av tråd, samt arbete.

För överbetyg förväntas också att du kan:

Adams	Mål
11.3	bestämma parametrisering av snitt av ytor
11.3	motivera formeln för beräkning av kurvlängd.
15.1	bestämma fältlinjer till vektorfält i planet.
15.4	definiera begreppen *område, sammanhängande område* och *enkelt samanhängande område*.
15.4	formulera satsen om kurvintegralers oberoende av integrationsvägen och bevisa att om vektorfältet är konservativt så är kurvintegralen oberoende av integrationsvägen
15.3-4	motivera definitionerna av begreppen kurvintegral av funktion/vektorfält.

(K8) Parametrisera på två olika sätt den kurva som följer ellipsen $x^2 + 4y^2 = 9$ i första kvadranten från $(3, 0)$ till $(1, \sqrt{2})$. Använd sedan respektive parametrisering för att bestämma två olika integraler som båda ger längden av kurvan.

(K9) Grafen till funktionen $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}, -2 \leq x \leq 2$, beskriver en funktionskurva i planet. Skissa kurvan och bestäm två olika parametriseringar av kurvan.

(K10) Följande parametriseringar beskriver olika kurvor i planet. Skissa dem och markera den orientering som följer med resp parametrisering. Vilka beskriver enkla slutna kurvor?

a) $\mathbf{r} = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}, -\pi/2 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$

b) $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, -1 \leq t \leq 1$

c) $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + t(1-t^2)\mathbf{j}, -1 \leq t \leq 1$

d) $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + t^4\mathbf{j}, -1 \leq t \leq 1$