MVE470/MVE351, Flervariabelanalys, läsåret 2017/18
Vecko–PM läsvecka 7

Adams: 16.1 - 16.5

I kapitel 16 skall vi gå vidare med våra studier av vektorfält. Vi kommer bl.a. bekanta oss med några viktiga differentialoperatorer på vektorfält; **div** (*divergensen*) och **curl** (*rotationen*). Även nabla-operatorn $\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ som vi stötte på redan i kapitel 12 spelar en viktig roll. Avsnitt 16.1 handlar mycket om vilken information som $\mathbf{div}\,\mathbf{F}$ och $\mathbf{curl}\,\mathbf{F}$ ger om ett vektorfält $\mathbf{F}$. Man kan säga att $\mathbf{div}\,\mathbf{F}(x,y,z)$ ger uttryck för hur mycket vektorfältet verkar ut från (eller in mot) punkten $P = (x,y,z)$. Om vektorfältet representerar ett flöde så kan man tänka på $\mathbf{div}\,\mathbf{F}(x,y,z)$ som *källstyrkan* i punkten P dvs. hur mycket av flödet (t.ex. gas, radioaktivitet eller dyl) som ”skapas/produceras” i punkten. Antag t.ex. att vi studerar flödet genom en sluten yta (t.ex. en sfär). Om det flödar mer ut ur området (som ytan begränsar) än in så måste det ju på något sätt produceras/skapas flöde inuti området dvs. finnas punkter där $\mathbf{div}\,\mathbf{F} > 0$. Om det inte sker någon källproduktion alls dvs. om $\mathbf{div}\,\mathbf{F} \equiv 0$ så sägs vektorfältet vara *källfritt*. Den andra viktiga operationen $\mathbf{curl}\,\mathbf{F}$ i detta kapitel ger istället uttryck för vektorfältets tendens att virvla/rotera i en omgivning av P. Till skillnad mot $\mathbf{div}\,\mathbf{F}$ (som ger ett värde) så ger $\mathbf{curl}\,\mathbf{F}$ en vektor i varje punkt. Riktningen på vektorn anger den axel kring vilket vektorfältet roterar mest. Om $\mathbf{curl}\,\mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$ så sägs vektorfältet vara *virvelfritt*.

Avsnitt 16.2 innehåller en del räknelagar för ovanstående differentialoperatorer samt några resultat som knyter an till vad vi delvis jobbade med i kapitel 15. Bl.a. är det så att om ett vektorfält är virvelfritt i ett enkelt sammanhängande område så är det också konservativt där.

Avsnitten 16.3-5 handlar om tre viktiga satser (Greens, Gauss's resp Stokes sats) som har stort teoretiskt intresse och är av central betydelse inom många områden/tillämpningar, inte minst för att analysera och lösa partiella differentialekvationer. Det huvudsakliga innehållet i satserna beskrivs av formler som knyter samman mycket av det vi arbetat med under del 2 av kursen;

$$\oint_{\partial D} F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA \qquad (Greens\ formel)$$

$$\iiint_K \mathbf{div}\,\mathbf{F}\, dV = \oiint_{\partial K} \mathbf{F}\cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS \qquad (Gauss's\ formel)$$

$$\oint_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{curl}\,\mathbf{F}\cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS \qquad (Stokes's\ formel)$$

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
16.1	1, 3, 6, 7		13, 14
16.2		10 (se (i) i Sats 3)	3, 5, 7, CR16.7
16.3	1, 3, 5	K16, K17	7, CR16.3
16.4	1, 3	5, 7, K19	9, 11, 15, 17
16.5			1, 3, 5, K18

Demo-uppgifter:

16.1.4, 16.3.2, 16.3.4, 16.4.4, 16.4.13, 16.5.7

Veckans studioövning

Denna veckas, och kursens sista, studioövning handlar om kurvor, vektorfält och ytor. Vi skall dels plotta, men även se hur man med enkla numeriska beräkningar kan erhålla bra approximationer av kurvlängd, samt area av vissa områden i planet.

Lärmål:

För att uppnå godkäntnivå på kursen förväntas att du kan:

Adams	Mål
16.1	beräkna *divergens*, div $\mathbf{F}$, och *rotation*, curl $\mathbf{F}$ för ett vektorfält $\mathbf{F}$.
16.2	definiera begreppen källfritt (solenoidal) och virvelfritt (irrotational) vektorfält.
16.2	tillämpa sats 16.2.4.
16.3	tillämpa Greens formel (16.3.6) i relativt okomplicerade situationer.
16.3	beräkna area av område i planet med hjälp av Greens formel
16.4	tillämpa divergenssatsen i relativt okomplicerade situationer.

För överbetyg förväntas också att du kan:

Adams	Mål
16.1	formulera sats 16.1.1 om divergensen som flödestäthet.
16.1	formulera sats 16.1.2 om rotationen som virveltäthet.
16.2	formulera och bevisa sats 16.2.3 g) och h)
16.3	formulera Greens formel (sats 16.3.6)och bevisa den för x- och y-enkla områden.
16.3	tillämpa Greens formel i mer komplicerade situationer.
16.4	formulera och bevisa divergenssatsen (sats 16.4.8) i tre dimensioner för z-enkla områden.
16.4	tillämpa divergenssatsen i mer komplicerade situationer.
16.5	formulera och tillämpa Stokes sats (16.5.10) i relativt okomplicerade situationer.

(K16) Rita i grova drag med angivande av orientering kurvan

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t(1-t^2) \end{cases} \qquad -1 \le t \le 1.$$

Beräkna arean av det området kurvan omslutar.

(K17) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma (-y^3)dx + (x^3 + e^{y^2})dy$$

där γ är halvcirkeln $(2\cos t, 2\sin t)$, $0 \le t \le \pi$. (Tips: Slut kurvan på lämpligt sätt och använd Greens sats.)

(K18) Låt C vara kurvan som ges av parametriseringen $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + 2 + sin2t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$, och låt $\mathbf{F}(x,y,z) = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (e^y + x^3)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$. Visa att kurvan C ligger på ytan $z = xy$ och cylindern $x^2 + y^2 = 4$ och använd Stokes sats för att beräkna kurvintegralen $\oint_C \mathbf{F}d\mathbf{r}$.

(K19) Låt S vara den del av ytan $z = 9 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför xy-planet. Räkna ut flödet upp genom S för vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = e^{yz}\mathbf{i} + x\mathbf{j} + e^{-x^2-y^2}\mathbf{k}$ genom att tillämpa Gauss divergenssats på lämpligt sätt.