MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola — Datum: 151028 kl. 14.00 - 18.00

Tentamen — Telefonvakt: Jonny Lindström 0733 607040

MVE475 Inledande Matematisk Analys

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2015 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 35 resp. 45 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 6 resp. 8 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (16p)

2. (a) Formulera medelvärdessatsen för derivator. Använd sedan denna till att bevisa att om en funktion är definierad på ett intervall och har en derivata som är positiv (på hela intervallet) så är funktionen strängt växande. (4p)

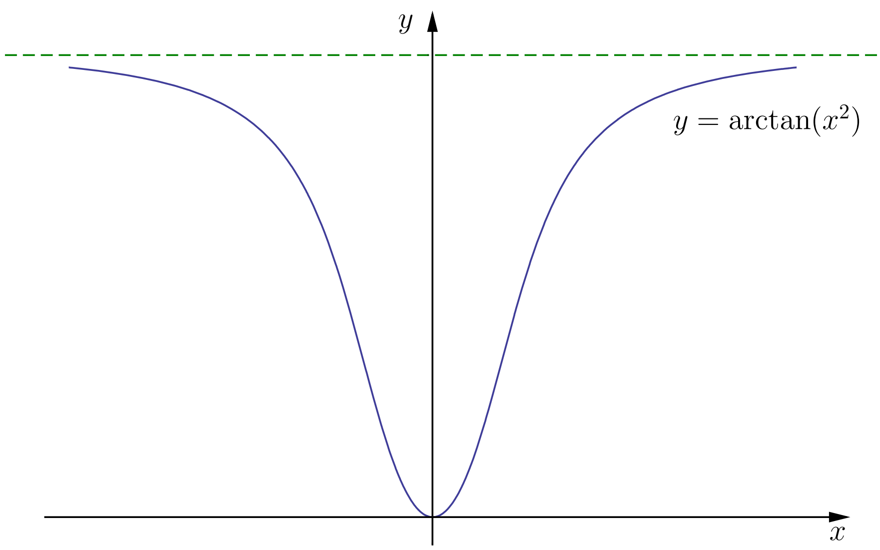
(b) Är funktionen $f(x) = \arctan x^2$ en strängt växande funktion? Motivera ditt svar! (2p)

Lösning

$f'(x) = \dfrac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x = \dfrac{2x}{1+x^4}$. Vi har att $f'(x) < 0$ då $x < 0 \Rightarrow f$ är strängt avtagande i detta intervall.

(c) Skissera grafen till f. (1p)

Lösning



3. (a) Låt f vara kontinuerlig på det slutna intervallet $[a, b]$. Använd huvudsatsen för att (3p) bevisa insättningsformeln

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

där F är en primitiv till f.

(b) Området givet av $0 \leq y \leq \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$ och $1 \leq x \leq 2$ roteras ett varv kring $x-$ axeln. Beräkna rotationskroppens volym. (3p)

Lösning:

$V = \pi \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+x}\, dx = \pi \int_1^2 (\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1})\, dx = \pi \int_1^2 (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})\, dx = \pi \left[\ln \frac{x}{x+1}\right]_1^2 =$
$\pi(\ln \dfrac{2}{3} - \ln \dfrac{1}{2}) = \pi \ln \dfrac{4}{3}$.

4. Rita grafen till $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+3}$. Ange speciellt eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. Ta också reda på var funktionen är konvex och konkav (concave up/down). (5p)

Lösning

$f \to -\infty$ då $x \to -\frac{3}{2}^-$ och $f \to \infty$ då $x \to -\frac{3}{2}^+$, vilket innebär att vi har en lodrät asymptot: $x = -\frac{3}{2}$.

Undersökning av sned asymptot ger

$\dfrac{f(x)}{x} \to \dfrac{1}{2}$, då $x \to \pm\infty$.

$f(x) - \frac{1}{2} \cdot x \to -\frac{3}{4}$ då $x \to \pm\infty$ vilket innebär att vi har en sned asymptot $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$.
Derivering av f ger

$$f'(x) = \frac{2x(2x+3) - 2x^2 - 4}{(2x+3)^2} = \frac{2x(x+3)}{(2x+3)^2}.$$

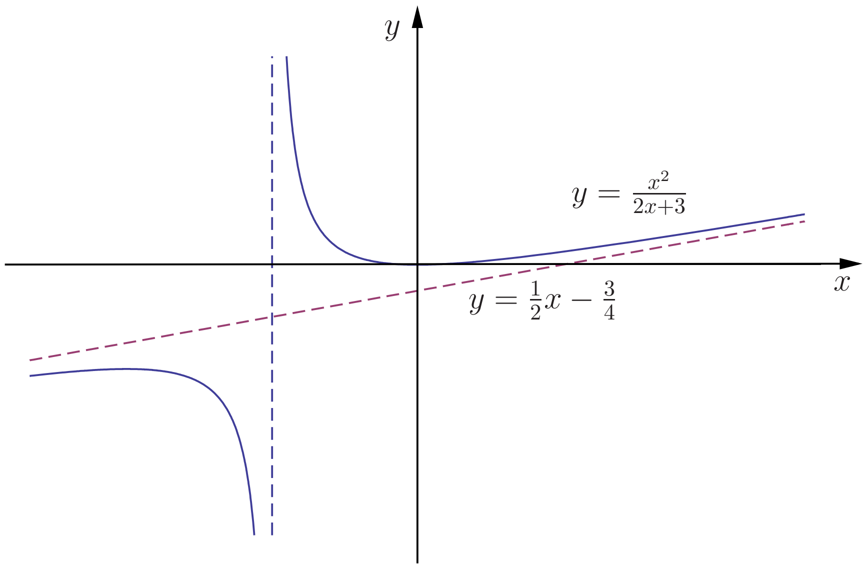
$$f''(x) = \frac{(4x+6)(2x+3)^2 - (2x^2+6x)4(2x+3)}{(2x+3)^4} = ... = \frac{18}{(2x+3)^3}.$$

Vi har att $f''(x) > 0$ då $x > -\frac{3}{2} \Rightarrow f$ konvex i intervallet och $f''(x) < 0$ då $x < -\frac{3}{2} \Rightarrow f$ konkav i intervallet.

Teckentabell

x	$-\infty$		-3		$-\frac{3}{2}$		0		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty/\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

Vi ritar nu grafen till f.



VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Ekvationen $x^7 - 5x^2 + 3 = 0$ har en rot i intervallet$(0, 2)$. (1p)

Lösning

Sant.

Vi har att $f(0) = 3 > 0$ och $f(2) = 111 > 0$, men vi ser att $f(1) = -1 < 0$, så det finns ett $c \in (0, 1)$ så att $f(c) = 0$, enligt satsen om mellanliggande värden.Det finns även en rot i intervallet $(1, 2)$ enligt samma resonemang.

(b) Om $x \in [-1, 1]$ så är $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$. (2p)

Lösning

Sant.

Sätt: $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ och visa först att f är en konstant funktion.

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow f(x) = c$, där c är en konstant.

$f(1) = \arcsin 1 + \arccos 1 = \dfrac{\pi}{2} + 0 = \dfrac{\pi}{2}$ och

$f(-1) = \arcsin(-1) + \arccos(-1) = -\dfrac{\pi}{2} + \pi = \dfrac{\pi}{2}$.

(c) Om $f(x)$ är en integrerbar funktion i en omgivning av origo så är $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ deriverbar i origo. (2p)

Lösning

Falskt.

Påståendet är sant om $f(x)$ är kontinuerlig(följer av analysens huvudsats), men om t.ex. $f(x)$ har ett språng i $x = 0$ så kommer $F(x)$ inte att vara deriverbar där. Om t.ex.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \ x < 0 \\ 1 & , \ x \geq 0 \end{cases}$$

så är f integrerbar men $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = |x|$ är ej deriverbar i origo.

6. Beräkna $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}\right) dx$. (3p)

Lösning

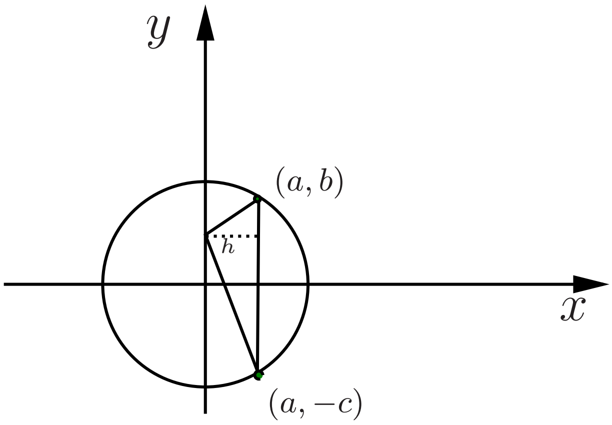
$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}\right) dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) dx = \lim_{R\to 0} \int_R^{\pi/2} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) dx = \lim_{R\to 0} \left[\ln x - \ln(\sin x)\right]_R^{\pi/2} =$$

$$\lim_{R\to 0} \left[\ln \frac{x}{\sin x}\right]_R^{\pi/2} = \ln \frac{\pi}{2} - \ln(\lim_{R\to 0} \frac{x}{\sin x}) = \ln \frac{\pi}{2} - \ln 1 = \ln \frac{\pi}{2}.$$

7. En triangel har ett hörn i punkten $(0, 1/2)$. Motstående sida är parallell med y-axeln. Hur stor kan triangelns area vara om hela triangeln ryms inom enhetscirkeln $x^2 + y^2 \leq 1$. (4p)

Lösning

Vi Ritar figur och inför beteckningar $a, b, c > 0$. och höjden h i rektangeln.



Arean av triangeln: A $= \dfrac{(b+c)\cdot h}{2}$,

där $h = a$ och $b + c = 2\sqrt{1-a^2}$(fås genom ekvationen $x^2 + y^2 = 1$).

Areafunktionen blir då $A(a) = a\sqrt{1-a^2}$ som efter derivering blir

$A'(a)\dfrac{1-a^2}{\sqrt{1-a^2}}$

$A'(a) = 0$ då $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ som ger största värde $A(\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = \dfrac{1}{2}$.

8. Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{2n} \dfrac{i}{n^2}\ e^{-i/n}$. (4p)

Lösning

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n^2}\ e^{-i/n} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n}\ e^{-i/n}\frac{1}{n}$$

är en Riemannsumma för $f(x) = xe^{-x}$ på intervallet $[0, 2]$ med indelningspunkterna $x_i = \dfrac{i}{n}$ ($2n$ delinterval). Vi får då

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{2n} \dfrac{i}{n}\ e^{-i/n}\dfrac{1}{n} = \displaystyle\int_0^2 xe^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}x\right]_0^2 + \int_0^2 e^{-x}\, dx = -2e^{-2} - \left[e^{-x}\right]_0^2 = -2e^{-2} - e^{-2} + 1 = 1 - 3e^{-2}$.

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	MVE475 Inledande Matematisk Analys 151028	sid.numme
		1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-2}}{2x+7}$. (3p)

Lösning:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2}}{2x+7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{4-2/x^2}}{x(2+7/x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{4-2/x^2}}{x(2+7/x)} \lim_{x\to-\infty} -\frac{\sqrt{4-2/x^2}}{(2+7/x)} = -1.$$

Svar: -1. ....

(b) Beräkna integralen $\int_0^1 \arctan x\, dx$. (3p)

Lösning:

$$\int_0^1 \arctan x\, dx = [x\arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Svar: $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$. ....

(c) Funktionen $f(x) = \sqrt{5-(g(x))^2}$ är given och vidare är $g(2) = 2$ och $g'(2) = 4$. Bestäm $f'(2)$. (3p)

Lösning:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{5-(g(x))^2}} \cdot (-2g(x)g'(x)) = -\frac{g(x)g'(x)}{\sqrt{5-(g(x))^2}}.$$
$$f'(2) = -\frac{g(2)g'(2)}{\sqrt{5-(g(2))^2}} = -\frac{2\cdot 4}{\sqrt{5-2^2}} = -8.$$

Svar: ....

(d) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2(\arctan x - \frac{\pi}{2})}{x+1}$. (3p)

Lösning:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(\arctan x - \frac{\pi}{2})}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{x+1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{x^2-(x+1)2x}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{(1+x^2)(-x^2-1)} = -1.$$

Svar: -1. ....

(e) Beräkna integralen $\int \dfrac{\sin x}{\cos^2 x - \cos x}\, dx$. (4p)

Lösning:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - \cos x}\, dx = \begin{Bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{Bmatrix} = -\int \frac{1}{t^2-t}\, dt = -\int (\frac{A}{t} + \frac{B}{t-1})\, dt =$$
$$\int (\frac{1}{t} - \frac{1}{t-1})\, dt = \ln|t| - \ln|t-1| + C = \ln|\cos x| - \ln|\cos x - 1| + C$$

Svar: $\ln|\cos x| - \ln|\cos x - 1| + C$. ....