MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola Datum: 160107 kl. 14.00 - 18.00

Tentamen Telefonvakt: Jakob Hultgren

0703 088304

MVE475 Inledande Matematisk Analys

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2015 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 35 resp. 45 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 6 resp. 8 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (16p)

2. (a) Bevisa formeln för partiell integration (3p)

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Lösning:

Se boken.

(b) Låt D vara det område som begränsas av $0 \leq y \leq \;xe^{-x}$ och $0 \leq x \leq 2$. Beräkna arean av D. Rita figur! (3p)

Lösning:

$$A = \int_0^2 xe^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^2 + \int_0^2 e^{-x}\,dx = -\frac{2}{e^2} - \left[e^{-x}\right]_0^2 = -\frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2} + 1 = 1 - \frac{3}{e^2}.$$

3. (a) Skriv ner definitionen av vad som menas med att den generaliserade integralen $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ är konvergent. (2p)

Lösning:

Se boken.

(b) Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$. (2p)

Lösning:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = [\text{lHospital}] = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

(c) Beräkna integralen $\int\limits_0^1 \ln x\,dx.$ (3p)

Lösning:

$$\int\limits_0^1 \ln x\,dx. = \lim_{t\to 0^+} \int\limits_t^1 \ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+} \left(\left[x\ln x\right]_t^1 - \int\limits_t^1 x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) = \lim_{t\to 0^+} \left(-t\ln t - (1-t)\right) =$$
$$0 - 1 + 0 = -1.$$

4. Rita grafen till $f(x) = x - \arctan(2x)$. Ange speciellt eventuella lokala extrempunkter och asymptoter(Du behöver inte utreda var funktionen är konvex och konkav). (5p)

Lösning:

Vi ser att f är definerad för alla reella x.

Undersökning av sned asymptot

$\dfrac{f(x)}{x} = 1 - \dfrac{\arctan(2x)}{x} \to 1,$ då $x \to \infty$. (eventuellt k-värde)

$f(x) - kx = x - \arctan(2x) - x = -\arctan(2x) \to -\dfrac{\pi}{2}$, då $x \to \infty$.

$y = x - \dfrac{\pi}{2}$ sned asymptot då $x \to \infty$.

P.S.S. får vi $y = x - \dfrac{\pi}{2}$ då $x \to -\infty$.

Deriverar vi $f(x)$ får vi

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2 = \frac{4x^2-1}{1+4x^2} = \frac{(2x+1)(2x-1)}{1+4x^2}$$

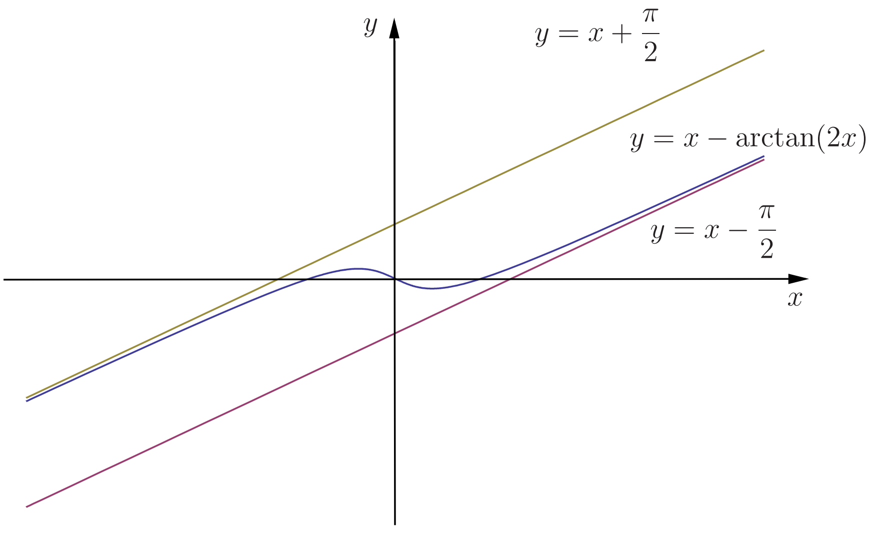
och vi ser att

$f'(x) = 0$ då $x = \pm\dfrac{1}{2}$.

Teckentabell

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	∞

Vi ritar nu grafen till f.



VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar.
(Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om en funktion är kontinuerlig på ett öppet intervall, så är den också deriverbar på intervallet. (1p)

Lösning:

Falskt:

Tag t.ex. $f(x) = |x|$ som är kontinuerlig på intervallet $(-1, 1)$ men ej deriverbar på intervallet $(-1, 1)$.

(b) $\displaystyle\int_{-10}^{10} (x^5 + \sin^7 x + x + 4)\, dx = 80$ (1p)

Lösning:

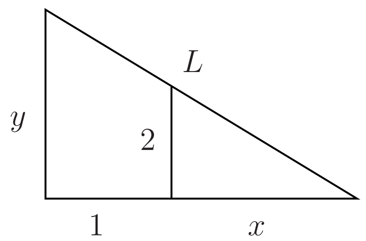
Sant:

$$\int_{-10}^{10} (x^5 + \sin^7 x + x + 4)\, dx = \underbrace{\int_{-10}^{10} (x^5 + \sin^7 x + x)\, dx}_{udda=0} + \int_{-10}^{10} 4\, dx = 80$$

6. Bestäm längden av den kortaste stege som står på golvet lutad mot en vertikal vägg och som en meter från väggen har ett två meter högt staket under sig. (4p)

Lösning:

Vi ritar en figur och inför beteckningar



Likformighet: $\dfrac{x+1}{y} = \dfrac{x}{2} \Rightarrow y = \dfrac{2(x+1)}{x}$.

Pythagoras sats: $L = \sqrt{(x+1)^2 + (\dfrac{2(x+1)}{x})^2}$

Derivering: $L' = \dfrac{1}{2\sqrt{(x+1)^2 + (\dfrac{2(x+1)}{x})^2}}(2(x+1) + 4 \cdot 2(\dfrac{(x+1)}{x} \cdot \dfrac{1 \cdot x - (x+1) \cdot 1}{x^2}) =$

$... = \dfrac{1}{2\sqrt{(x+1)^2 + (\dfrac{2(x+1)}{x})^2}}(x+1)(2 - \dfrac{8}{x^2})$.

$L' = 0$ för $x = 2^{2/3}$. Insättning i L ger $L = ... = (2^{2/3} + 1)^{3/2}$, vilket är det minsta värdet som L kan anta.

7. Låt $f(x) = x^3 + 3x$. Beräkna $\displaystyle\int_0^4 f^{-1}(x)\, dx$. (4p)

Lösning:

$$\int_0^4 f^{-1}(x)\, dx = \left\{ \begin{array}{c} t = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(t) = x \\ dx = f'(t)\, dt \\ x = 4 \Leftrightarrow t = 1 \text{ och } x = 0 \Leftrightarrow t = 0 \end{array} \right\} = \int_0^1 t f'(t)\, dt = \int_0^1 t(3t^2 + 3)\, dt = \frac{9}{4}.$$

8. (a) Formulera och bevisa analysens huvudsats. (4p)

Lösning:

Se boken

(b) Beräkna derivatan av funktionen (2p)

$$f(x) = \int_{2x}^{x^2} e^{t^2}\ dt$$

i punkten $x = 1$.

Lösning:

$$\frac{d}{dx}\int_{2x}^{x^2} e^{t^2}\ dt = \frac{d}{dx}\int_{0}^{x^2} e^{t^2}\ dt - \frac{d}{dx}\int_{0}^{2x} e^{t^2}\ dt = \frac{d}{du}\left[\int_{0}^{u} e^{t^2}\ dt\right]\frac{du}{dx} - \frac{d}{dv}\left[\int_{0}^{v} e^{t^2}\ dt\right]\frac{dv}{dx} =$$

$$e^{u^2}\frac{du}{dx} - e^{v^2}\frac{dv}{dx} = e^{x^4}\cdot 2x - e^{4x^2}\cdot 2 = 2(xe^{x^4} - e^{4x^2}).$$

Insättning av $x = 1$ ger att $f'(1) = 2(e - e^4)$.

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	MVE475 Inledande Matematisk Analys 160107	sid.nummer 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna integralen $\int \frac{3x-1}{x^2-2x-3}\,dx$. (3p)

Lösning:

$$\int \frac{3x-1}{x^2-2x-3}\,dx = \int \frac{3x-1}{(x+1)(x-3)}\,dx = \int (\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3})\,dx =$$
$$\int (\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-3})\,dx = \ln|x+1| + 2\ln|x-3| + C.$$

Svar: $\int \frac{3x-1}{x^2-2x-3}\,dx = \ln|x+1| + 2\ln|x-3| + C.$

(b) Beräkna undersumman L_4 till integralen $\int_0^1 x^2\,dx$. (3p)

Lösning:

$$L_4 = \frac{1}{4}\cdot f(0) + \frac{1}{4}\cdot f(1/4) + \frac{1}{4}\cdot f(2/4) + \frac{1}{4}\cdot f(3/4) = \frac{1}{4}(0^2 + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{2}{4})^2 + (\frac{3}{4})^2$$
$$= \frac{1}{64}(1^2+2^2+3^2) = \frac{16}{64} = \frac{7}{32}.$$

Svar: $L_4 = \frac{7}{32}.$

(c) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $2y^4 + x^3 = x^2y^3$ i punkten $(-1,1)$. (3p)

Lösning:

Implicit derivering ger: $8yy' + 3x^2 = 2xy^3 + 3x^2y^2y'$. Insättning av $x=-1$ och $y=1$ ger $y'=-1$. Insättning i tangentens ekvation ger $y-1 = -1(x+1) \Leftrightarrow y=-x$.

Svar: $y=-x.$

(d) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$. (3p)

Lösning:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+9-9}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3} = \frac{1}{6}.$$

Svar: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \frac{1}{6}.$

(e) Beräkna integralen $\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}\,dx$. (4p)

Lösning:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}\,dx = \left\{\begin{matrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{matrix}\right\} = \int \frac{1}{t^2+t-2}\,dt = \int \frac{1}{(t-1)(t+2)}$$
$$= \int (\frac{1/3}{t-1} - \frac{1/3}{t+2})\,dt = \frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{3}\ln|t+2| + C$$
$$= \frac{1}{3}\ln|\frac{e^x-1}{e^x+2}| + C.$$

Svar: $\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}\,dx = \frac{1}{3}\ln|\frac{e^x-1}{e^x+2}| + C.$