MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 160825 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Carl Lundholm
5325

MVE475 Inledande Matematisk Analys

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2015 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 35 resp. 45 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 6 resp. 8 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (13p)

2. (a) Härled (bevisa) deriveringsregeln för $\arccos x$. (3p)

(b) Bestäm tangenten till kurvan $\sin(x+y) = 3x - 3y$ i punkten $(\pi; \pi)$. (3p)

3. (a) Visa substitutionsregeln för integraler, dvs om $g(x) = u$ är en deriverbar funktion vars värdemängd är ett intervall I och f är kontinuerlig på I så gäller att (3p)

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

(b) Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x} - e^x - 2}\,dx$. (4p)

4. Skissera en graf som uppfyller följande villkor: (4p)

- f kontinuerlig och udda
- $f'(x) < 0$ för $0 < x < 1$ och $f'(x) > 0$ för $x > 1$
- $f''(x) > 0$ för $0 < x < 2$ och $f''(x) < 0$ för $x > 2$
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = -3$.

5. Volymen av en kub expanderar med en hastighet av 5 cm^3/min. I vilken takt förändras kubens area när kubens ena kant är 15 cm? (4p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar.
(Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om f är deriverbar och strängt växande på intervallet(a, b), så gäller att $f'(x) > 0$ för alla $x \in (a, b)$. (2p)

(b) Om $f(x)$ är växande på intervallet $[0, 1]$ så är $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \leq f(1)$. (2p)

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{1}{2}$ (2p)

7. En rak cirkulär cylinder med radien r är inskriven i en rak cirkulär kon med basradien R. Visa att cylinderns volym blir maximal då $r = \dfrac{2}{3}R$. (5p)

8. En rektangulärt formad simbassäng , som är 8 meter bred och 20 meter lång, är helt fylld med vatten. Simbassängens plana botten sluttar så det är 1 meter djupt i ena kortändan och 3 meter djupt i den andra. Bestäm hur mycket arbete det krävs för att pumpa ut allt vatten över bassängkanten. (5p)

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	MVE475 Inledande Matematisk Analys 160825	sid.nummer 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Summan av två positiva tal är 12. Visa med hjälp av derivata att produkten av de båda talen antar ett största värde, samt ange detta värde. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm linjäriseringen av $f(x) = \sin(2x)$ kring punkten $x = \dfrac{\pi}{3}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - 1 - 3x}{x^2}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Bestäm konstanten a så att gränsvärdet (4p)

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2+ax}{x^2+x-2} - \frac{2}{x+2}\right)$$

existerar, samt beräkna gränsvärdet för det erhållna värdet på konstanten a.

Lösning:

Svar: ....

Lösningar MVE475, Inledande Matematisk Analys, 160825

1. (a) $x + y = 12 \Leftrightarrow y = 12 - x$ så $P(x) = x(12 - x) \Rightarrow P'(x) = 12 - 12x = 0$ då $x = 6$
$P''(6) = -12 < 0$ vilket innebär att vi har lok.max. för $x = 6 \Rightarrow P(6) = 36$

(b) $f(\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2}, f'(x) = 2\cos(2x) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}.$

Linjäriseringen blir då

$$L(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{3}(x - \frac{\pi}{3}).$$

(c) Vi tillämpar l'Hospital två gånger och får då

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 1 - 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3e^{3x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{9e^{3x}}{2} = \frac{9}{2}.$$

(d) $\dfrac{x^2 + ax}{x^2 + x - 2} - \dfrac{2}{x + 2} = \dfrac{x^2 + ax - 2x + 2}{(x + 2)(x - 1)}$

Vi löser täljaren $= 0$ för $x = -2$ och får då att $a = 5$. Insättning av a ger

$$\frac{x^2 + 5x - 2x + 2}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{(x + 2)(x + 1)}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{x + 1}{x - 1} \to \frac{1}{3}, \text{ då } x \to -2.$$

2. (a) Se boken!

(b) Implicit derivering ger:

$$\cos(x + y)(1 + y') = 3 - 3y', \Rightarrow y' = \frac{3 - \cos(x + y)}{3 + \cos(x + y)} \Rightarrow f'(\pi) = \frac{3 - \cos(2\pi)}{3 + \cos(2\pi)} = \frac{1}{2}.$$

Insättning i tangentens ekvation ger

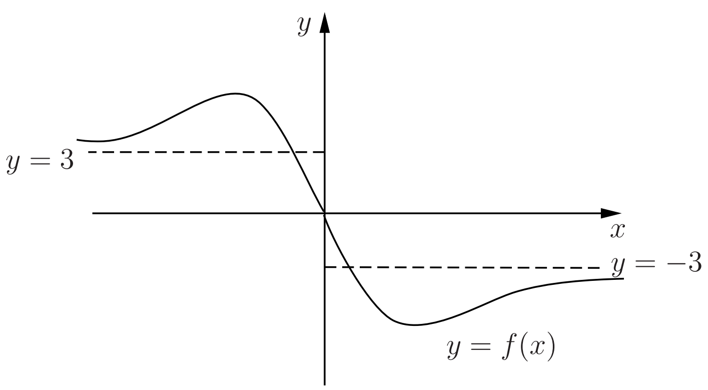
$$y - \pi = \frac{1}{2}(x - \pi) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}.$$

3. (a) Se boken!

(b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x} - e^x - 2}\,dx = \left[\begin{array}{c} e^x = t \\ dt = 2x\,dx = \end{array} \right] = \int \frac{1}{t^2 - t - 2}\,dt = \int \frac{1}{(t + 1)(t - 2)}\,dt =$

$$\int (\frac{-1/3}{t + 1} + \frac{1/3}{t - 2})\,dt = \frac{1}{3}\ln|t - 2| - \frac{1}{3}\ln|t + 1| + C = \frac{1}{3}\ln|\frac{e^x - 2}{e^x + 1}| + C.$$

4.



5. $\dfrac{dA}{dt}$ sökes då $x = 15$. $\quad \dfrac{dV}{dt} = 5$ är givet.

Kedjeregeln ger

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt} = 5 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{5}{3x^2}.$$

Nu tillämpar vi kedjeregeln igen

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dx}\frac{dx}{dt} = 12x \cdot 3x^2$$

och vi får

$$\frac{dA}{dt}\Big|_{x=15} = \frac{4}{3}$$

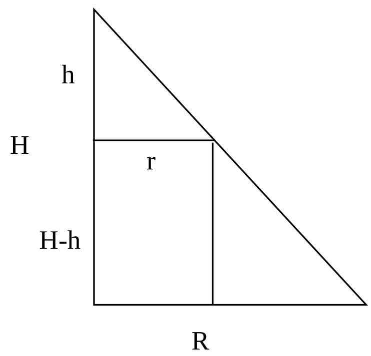
6. (a) Falskt.Tag t.ex. $f(x) = x^3$ som har derivatan $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$, så tar vi t.ex intervallet $(-1, 1)$ stämmer ej påståendet att $f'(x) > 0, x \in (-1, 1)$.

(b) Sant. (Kap.5.2.7) Eftersom $f(x) \leq f(1)$ för alla $x \in [0, 1]$ så är

$$\int_0^1 f(x)\,dx < \int_0^1 f(1)\,dx = f(1).$$

(c) Sant. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \left[\begin{array}{c} \Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n} \\ x_i = 0 + \frac{i}{n} \\ f(x_i) = \frac{i}{n} \end{array} \right] = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$

7. Figur!



Likformighet ger $\dfrac{r}{h} = \dfrac{R}{H} \Rightarrow h = \dfrac{rH}{R}$

Volymen av cylindern blir då

$$V = \pi r^2(H - h) = \pi r^2 H - \pi r^2(\frac{rH}{R}) = \pi r^2 H - \pi r^3 \frac{H}{R}$$

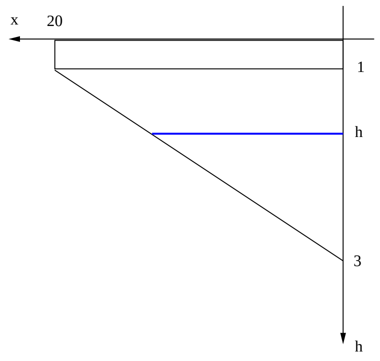
Derivering av $V(r)$ ger

$$V'(r) = 2\pi H r - \frac{3\pi H r^2}{R} = \pi r H(2 - \frac{3r}{R})$$

$V'(r) = 0$ då $r = \dfrac{2}{3}R$

$V''(\dfrac{2}{3}R) < 0$ vilket visar att vi har ett max i $r = \dfrac{2}{3}R$.

8. Figur på bassängen sett från sidan:



När $0 < h \leq 1$ är areaplattan $A(h) = 8 \cdot 20 = 160$

När $1 < h \leq 3$ så är bredden lika med 8 konstant och sidan 20 som varierar med vattendjupet.

Enligt figur ser vi att $h - 3 = -\dfrac{1}{10}(x - 0)$ vilket ger $x = 30 - h$. Arean av plattan blir då i detta intervall $A(h) = 8(30 - h) = 240 - 80h$.

Arbetet blir då:

$$W = \int_0^3 \rho g A(h) h \, dh = \rho g \int_0^1 160h \, dh + \int_1^3 \rho g (240 - 80h) h \, dh \approx 3,4 \cdot 10^6 \text{ Nm}.$$