MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola | Datum: 161222 kl. 14.00 - 18.00

Tentamen | Telefonvakt: Jonny Lindström 5884

MVE475 Inledande Matematisk Analys

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2016 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 35 resp. 45 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 6 resp. 8 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (12p)

2. (a) Formulera analysens huvudsats(I boken kallad del 1). (2p)

(b) Funktionen $f(x) = \int_0^x (1-t^2)e^{t^2}\,dt$ är given. På vilket intervall är f strängt växande? (3p)

3. (a) Formulera medelvärdessatsen för derivator. Rita figur! (2p)

(b) Finns det en funktion f sådan att $f(2) = -2, f(5) = 1$ och $f'(x) > 1$ för alla x. (2p)

4. Rita grafen till $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$. Ange speciellt eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. Ta också reda på var funktionen är konvex och konkav (concave up/down).. (5p)

5. Kurvorna $y = x^2+1$ och $y = 3-x^2$ avgränsar tillsammans ett begränsat område. Beräkna volymen av den kropp som skapas då området roterar krin linjen $y = -1$. (4p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar.
(Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) $\arcsin(\sin x) = x$ för varje reellt tal x. (1p)

(b) Om $f(x)$ är kontinuerlig på ett viss intervall så är $f(x)$ också integrerbar på intervallet. (1p)

(c) Om $\lim_{x \to a} |f(x)|$ existerar, så måste också $\lim_{x \to a} f(x)$ existera. (2p)

(d) Om $f(x)$ är kontinuerlig och $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 0$, för alla x, så är $f(x)$ en udda funktion. (2p)

7. Beräkna den generaliserade integralen $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$. (5p)

8. Antag att f är en injektiv och deriverbar funktion, och att även f^{-1} är deriverbar. Antag vidare att $f(1) = 3$ och $f'(1) = 9$. Bestäm $(f^{-1})'(3)$. (5p)

Lycka till!
Jonny L

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x+3}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Om $f(2) = 4$, f' är kontinuerlig, och $\int_2^5 f'(x)\,dx = 15$ är givet. Bestäm $f(5)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Beräkna integralen $\int_0^\pi \cos^2 x \sin x\,dx$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

VÄND!

(d) Beräkna översumman R_5 till integralen $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Luft pumpas in i en sfärisk ballong så att dess volym ökar med en hastighet av $50\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$. Hur snabbt växer radien i ballongen vid det ögonblick då diametern är 10 cm. (4p)

Lösning:

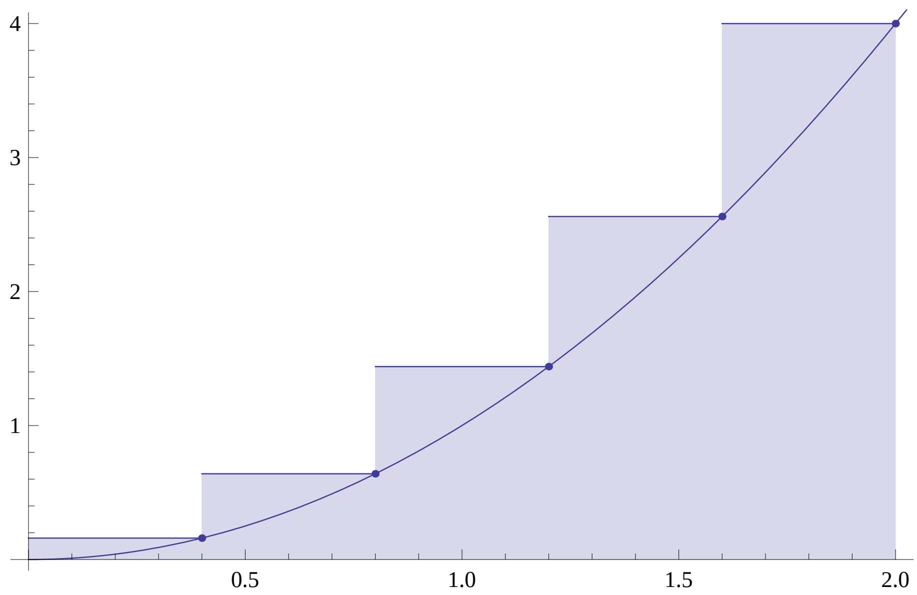
Lösningar MVE475, Inledande Matematisk Analys, 161222

1. (a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-9}}{2x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}{x(2+\frac{3}{x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}} = -\frac{1}{2}$

(b) $\int_2^5 f'(x)\,dx = f(5) - f(2) = f(5) - 4 = 15 \Rightarrow f(5) = 19.$

(c) $\int_0^\pi \cos^2 x \sin x\,dx \left\{\begin{array}{c} \cos x = u;\ du = -\sin x\,dx \\ x = \pi \Rightarrow u = -1 \,\text{och}\, x = 0 \Rightarrow u = 1 \end{array}\right\} = \int_{-1}^1 u^2\,du = \frac{2}{3}.$

(d) Figur!



$$R_5 = \frac{2}{5}\left(f(\frac{2}{5}) + f(\frac{4}{5}) + f(\frac{6}{5}) + f(\frac{8}{5}) + f(\frac{10}{5})\right) = \frac{2}{125}\left(2^2+4^2+6^2+8^2+10^2\right) = \frac{88}{25}.$$

(e) Givet: $\frac{dV}{dt} = 50\,cm^3/s.$

Sökes: $\frac{dr}{dt}|_{r=5}$

Vi tillämpar kedjeregeln och får

$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt},$

så

$\frac{dr}{dt}|_{r=5} = \frac{1}{4\pi 5^2}\cdot 50 = \frac{1}{2\pi}.$

2. (a) Se boken.

(b) Enligt analysens huvudsats har vi att

$f'(x) = (1-x^2)e^{x^2}$

och vi ser att

$f'(x) > 0$ då $|x| < 1$. I detta intervall är f strängt växande.

3. (a) Se boken.

(b) Antag att det finns en funktion f sådan att $f(2) = -2$ och $f(5) = 1$. Medelvärdessatsen säger då att det finns ett tal $c \in (-2, 1)$ så att

$$f'(c) = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{1-(-2)}{5-2} = 1.$$

Men $f'(x) > 1$ för alla x och vi har en motsägelse, så det finns ingen funktion f som uppfyller villkoren.

4. Vi börjar med att undersöka om vi har några lodräta asymptoter.

$f \to -\infty$ då $x \to -1^-$ och $f \to \infty$ då $x \to -1^+$, vilket innebär att vi har en lodrät asymptot: $x = -1$.

$f \to -\infty$ då $x \to 1^-$ och $f \to \infty$ då $x \to 1^+$, vilket innebär att vi har en lodrät asymptot: $x = 1$.

Vi fortsätter med att undersöka om vi har någon/några sned asymptot/asymptoter.

$\dfrac{f(x)}{x} \to 1$, då $x \to \pm\infty$.

$f(x) - 1 \cdot x \to 0$ då $x \to \pm\infty$ vilket innebär att vi har en sned asymptot $y = x$ då $x \to \pm\infty$.
Derivering av f ger

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

Derivering av f' ger

$$f''(x) = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = ... = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

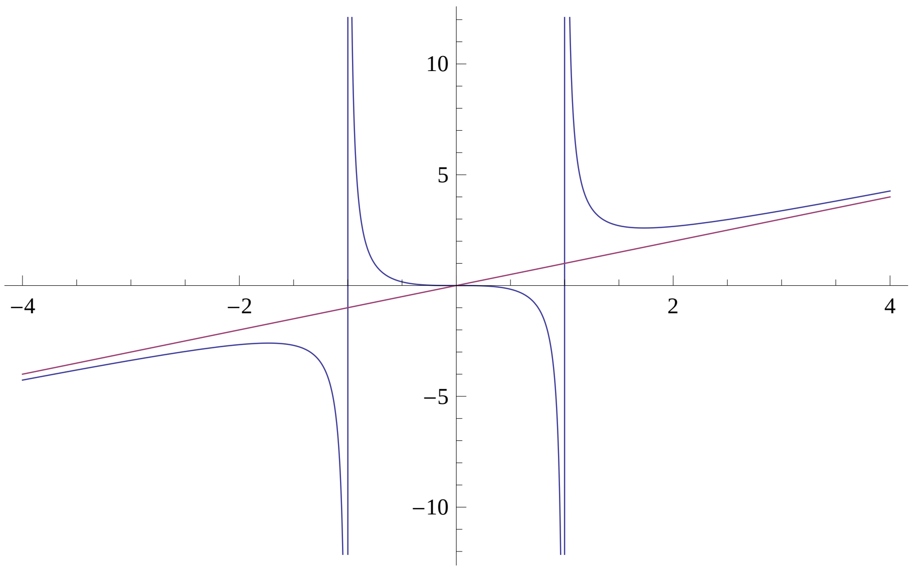
Teckentabell

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\infty/\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty/\infty$	$\searrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	∞

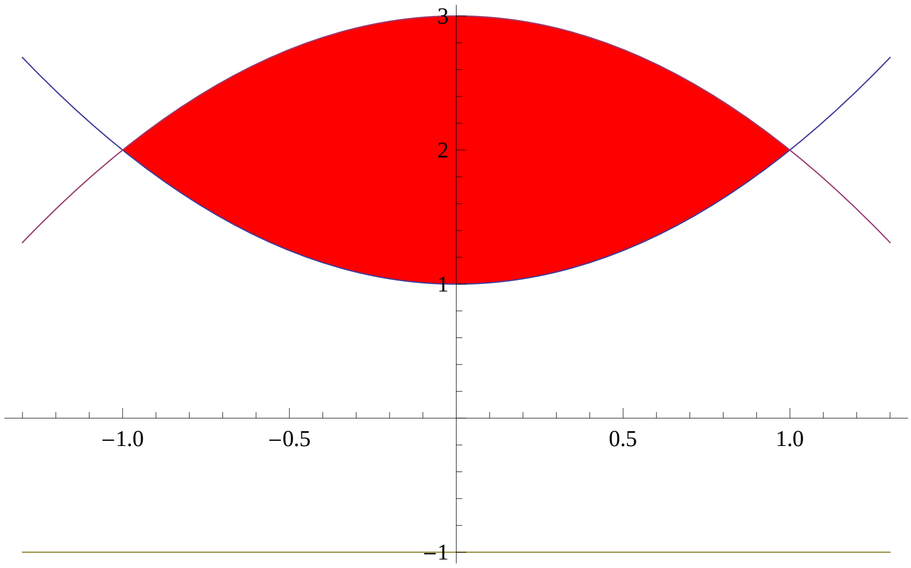
Tabell för studering av andraderivatan

x		-1		0		1	
f''	$-$		$+$		$-$		$+$
f	konkav		konvex	infl.pkt.	konkav		konvex

Vi ritar nu grafen till f.



5. Vi börjar med att rita figur



Rotationsvolymen som uppstår då det röda begränsade området roterar kring linjen $y = -1$ blir då

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (((3-x^2)-(-1))^2-((x^2+1)-(-1))^2)\,dx = 4\pi \int_{-1}^{1} (5-3x^2)\,dx = 8\pi \int_{0}^{1} (5-3x^2) = 32\pi.$$

6. (a) Falskt. Tag till exempel $x = \pi$, då är VL= $\arcsin(\sin\pi) = \arcsin 0 = 0$ och HL= π,vilket visar att påståendet är falskt.

(b) Sant. Sats 5.2.3.

(c) Falskt. Tag Funktionen $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$. Då gäller att $\lim_{x\to 0} |f(x)| = 1$. Men $\lim_{x\to 0} f(x)$ existerar ej ty $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ och $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$.

(d) Sant.

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^{-x} f(t)\,dt\right) = 0, \text{för alla}\, x.$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f(x) + f(-x) = 0, \text{för alla}\, x\text{(Analysens huvudsats)}.$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f(-x) = -f(x), \text{för alla}\, x.$$

7. Vi beräknar först

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{2}{\cos t} \\ dx = 2\frac{\tan t}{\cos t}\,dt \end{array} \right\} = \int \frac{1}{\dfrac{2}{\cos t}\cdot 2\tan t} \cdot 2\,\frac{\tan t}{\cos t}\,dt = \int \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\,t = \frac{1}{2}\arccos\frac{2}{x}.$$

Så

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx + \int_3^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx =$$

$$\lim_{u\to 2^+}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\arccos\frac{2}{u}\right) + \lim_{u\to\infty}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{u} - \frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3}\right) =$$

$$-\frac{1}{2}\arccos 1 + \frac{1}{2}\arccos 0 = \frac{\pi}{4}.$$

8. Vi sätter $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$ och deriverar $f(y) = x$ implicit.

$$f'(y)\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$$

Men $y = f^{-1}(x)$ så

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Insättning i ovanstående formel ger

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{9}.$$