MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola Datum: 161026 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen Telefonvakt: Jonny Lindström
5884

MVE475 Inledande Matematisk Analys

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2016 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 35 resp. 45 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 6 resp. 8 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (12p)

2. (a) Rita grafen till funktionen $f(x) = \arcsin x$. Ange f:s definitions- och värdemängd. (2p)

(b) Härled (bevisa) deriveringsregeln för $\arcsin x$. (3p)

(c) Bestäm tangenten till kurvan $\tan(x - y) = y^2 \sin x$ i punkten $(\pi; \pi)$. (3p)

3. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar.
(Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om $f'(x) < 0$ på intervallet $(2, 7)$ så är f strängt avtagande på intervallet $(2, 7)$ (1p)

(b) Om $f(x) = x^4$ så är $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 108$ (1p)

(c) Om $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = 0$ så är $f(x) = 0$ för $0 \le x \le 1$. (1p)

4. Låt D vara det område i första kvadranten som begränsas av $y-$ axeln, $x-$ axeln och kurvan $y = \cos x$. Beräkna volymen av den kropp som bildas då området D roterar kring (6p)

a) $x-$ axeln. b) $y-$ axeln.

5. Rita grafen till $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2x + 1}{2x - 1}\right)$. Ange speciellt eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. Ta också reda på var funktionen är konvex och konkav (concave up/down). (5p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om f har en diskontinuitet i $x = 0$ så existerar ej $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. (1p)

(b) Gränsvärdet $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x^2)$ existerar ej. (2p)

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(1+\frac{2}{n}) + \ldots + \ln(1+\frac{n}{n})\right) = 2\ln 2 - 1$ (3p)

7. Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x (1+\sin 3t)^{1/t}\,dt$. (5p)

(Antag att integranden är definerad och kontinuerlig i $t = 0$.)

8. Bevisa medelvärdessatsen för derivator. (5p)

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	MVE475 Inledande Matematisk Analys 161026	sid.nummer 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Funktionen $f(x) = \dfrac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 4}$ har en sned asymptot. Bestäm dess ekvation. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna den obestämda integralen $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}\, dx$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{x^2}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + x}\, dx$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

Lösningar MVE475, Inledande Matematisk Analys, 161026

1. (a) k-värde:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2x^3+4x^2+2x+3}{x^3+2x^2+4x} \to 2 \text{ då } x \to \pm\infty.$$

m-värde:

$$f(x) - kx = \frac{2x^3+4x^2+2x+3}{x^2+2x+4} - 2x = \frac{3-6x}{x^2+2x+4} \to 0 \text{ då } x \to \pm\infty.$$

Sned asymptot: $y = 2x$.

(b)

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{matrix} \right\} = \int \frac{1}{1+u^2}\, du = \arctan u + C = \arctan(\sin x) + C.$$

(c) Vi tillämpar l'Hospitals regel två gånger och får att

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-3\sin 3x + 2\sin 2x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-9\cos 3x + 4\cos 2x}{2} = -\frac{5}{2}.$$

(d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x(x+1)}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t (\frac{A}{x} - \frac{B}{x+1})\, dx =$
$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \int_1^t (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})\, dx = \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln(t+1)) + \ln 2 = \lim_{t\to\infty} \ln\frac{t}{t+1} + \ln 2 = \ln 1 + \ln 2 =$
$\ln 2$.

2. (a) Se boken eller föreläsningsanteckningarna.

(b) Se boken eller föreläsningsanteckningarna.

(c) Implicit derivering ger

$$(1+\tan^2(x-y)(1-y')) = 2yy'\sin x + y^2\cos x$$

Insättning av (π, π) ger

$$1 - y'(\pi) = -\pi^2 \Rightarrow y'(\pi) = 1 + \pi^2,$$

och vi får

$$y - \pi = (1+\pi^2)(x-\pi) \Leftrightarrow y = (1+\pi^2)x - \pi^3.$$

3. (a) Sant. Enligt följdsats till medelvärdessatsen gäller att om $f'(x) < 0$ för alla $x \in I \Rightarrow$ att f är strängt avtagande på I.

(b) Sant. gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3)$ enligt derivatans definition, där $f(x) = x^4$. Vi får då att $f'(3) = 4 \cdot 3^3 = 108$.

(c) Falskt. Tag t.ex. $f(x) = \cos(\pi x)$. Då är $\displaystyle\int_0^1 \cos(\pi x)\, dx = 0$.

4. (a) Första nollstället till funktionen $f(x) = \cos x$ är då $x = \dfrac{\pi}{2}$. Skivmetoden ger

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x + 1}{2}\, dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2} + x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

(b) Cylinderskalmetoden ger

$$V = \int_0^{\pi/2} 2\pi x\cos x\, dx = 2\pi\left[x\sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2\pi\sin x\, dx = \pi^2 + 2\pi\left[\cos x\right]_0^{\pi/2} = \pi^2 - 2\pi.$$

5. $D_f = \{x : x \neq \dfrac{1}{2}\}$.

Gränsvärdesstudering ger

$$\lim_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \qquad \text{och} \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Vi har då att $y = \dfrac{\pi}{4}$ är en vågrät asymptot då $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \arctan\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{och} \qquad \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \arctan\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

och vi ser att höger- och vänstergränsvärde existerar och är olika.

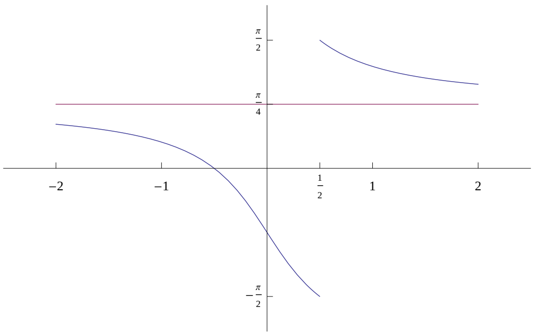
Deriverar vi f får vi

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\frac{2x+1}{2x-1})^2} \cdot \frac{2(2x-1)-2(2x+1)}{(2x-1)^2} = ... = -\frac{2}{1+4x^2}.$$

och vi ser att $f'(x) < 0$ för alla x som tillhör D_f, vilket medför att f är strängt avtagande.

Om vi nu deriverar f' får vi

$f''(x) = -2\cdot(-1)(1+4x^2)^{-2}8x = \dfrac{16x}{(1+4x^2)^2}$ och vi ser att f är konkav då $x < 0$ och konvex då $x > 0$ ($x \neq \frac{1}{2}$). Vi skisserar nu grafen till f.



6. (a) Falskt. Tag tex funktionen $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$, som har en hoppdiskontinuitet i $x = 0$, men $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx = 1$.

Notera att f är integrerbar enligt Sats 5.2.3.

(b) Falskt. Vi har att $-1 \leq \sin\dfrac{1}{x^2} \leq 1$ och ska nu tillämpa instängningssatsen i två fall. Då $x < 0$ och $x > 0$.

$x > 0$:

$-x \leq x \sin\dfrac{1}{x^2} \leq x \Rightarrow x\sin\dfrac{1}{x^2} \to 0$ då $x \to 0^+$.

$x < 0$:

$x \leq x \sin\dfrac{1}{x^2} \leq -x \Rightarrow x\sin\dfrac{1}{x^2} \to 0$ då $x \to 0^-$,

vilket innebär att $x\sin\dfrac{1}{x^2} \to 0$ då $x \to 0$.

(c) Sant. Vi har att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(1+\frac{2}{n}) + ... + \ln(1+\frac{n}{n})\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} =$$

$$\begin{bmatrix} \Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n} \\ x_i = 0 + \frac{i}{n} \\ f(x_i) = \ln(1+\frac{i}{n}) \end{bmatrix} = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = ... = 2\ln 2 - 1.$$

7. Vi använder oss av l'Hospital och analysens huvudsats och får då

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (1+\sin 3t)^{1/t}\,dt = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (1+\sin 3t)^{1/t}\,dt}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\int_0^x (1+\sin 3t)^{1/t}\,dt}{1} =$$

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{1/x}.$$

När vi nu beräknar gränsvärdet $\lim_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{1/x}$ använder vi oss av gränsvärde av sammansatt funktion och l'Hospitals regel och får då

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+\sin 3x)}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 3x)}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{1+\sin 3x}} = e^3.$$

8. Se boken eller föreläsningsanteckningar.