MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola Datum: 171025 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen Telefonvakt: Jonny Lindström
0733 607040

MVE475 Inledande Matematisk Analys

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2017 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 35 resp. 45 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 8 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Formulera analysens huvudsats. (2p)

(b) Bevisa insättningsformeln genom att använda analysens huvudsats. (3p)

(c) Är det sant eller falskt att $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^2 e^{t^2}\,dt = e^4$? (1p)

3. (a) Bevisa att om f har ett lokalt maximum i c och $f'(c)$ existerar så är $f'(c) = 0$. (3p)

(b) Gäller omvändning av satsen d.v.s. att om $f'(c) = 0$ så har f ett lokalt maximum. (1p)

(c) Ge exempel på en kontinuerlig funktion som är konvex då $x < 0$ och konkav då $x > 0$. (1p)

4. Funktionen $f(x) = xe^{-1/x}$ är given.

(a) Undersök om $\lim_{x\to 0} f(x)$ existerar. (2p)

(b) Undersök om f har några asymptoter. (3p)

(c) Undersök om f har någon/några extrempunkter. (2p)

(d) Skissera grafen till f. (2p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Derivatan av en udda funktion är en jämn funktion. (1p)

(b) Om f är kontinuerlig så är $\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx$. (2p)

(c) Antag att f är kontinuerlig på $[0,\infty)$ och att $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. Då är $\int_0^{\infty} f(x)\ dx$ divergent. (3p)

6. Går det att bestämma konstanterna a och b så att (5p)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(4x)}{x^3} + \frac{a}{x^2} + b\right) = 1.$$

Gör i så fall detta!

7. Ett hål med radie 1 borras genom centrum av ett klot med radie 2. Bestäm volymen av den resterande delen av klotet. (5p)

Lycka till!
Jonny L

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Funktionen $f(x) = e^x + \arctan x$ är given. (2p)

i. Är f en strängt växande funktion?

ii. Bestäm $f^{-1}(1)$.

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{5x+9}{x^2+4x+3}\,dx$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $\sin(x+y) = 2x - 2y$ i punkten (π, π). (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Låt $f(x) = e^{\sin x} \cos x$. Beräkna arean av det område, i första kvadranten, som begränsas av grafen till $y = f(x)$ och koordinataxlarna. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Låt $f(x) = x^4$. Beräkna översumman av $f(x)$ på intervallet $[-1, 1]$ med steglängden $\Delta x = 1/2$. (3p)

Lösning:

Lösningar MVE475, Inledande Matematisk Analys, 171025

1. (a) $f'(x) = e^x + \dfrac{1}{1+x^2} > 0 \Rightarrow f$ är en strängt växande funktion.

$f^{-1}(1) = 0$ ty $f(0) = 1$.

(b) $\displaystyle\int \frac{5x+9}{x^2+4x+3}\,dx = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}\right)dx = \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+3}\right)dx =$

$2\ln|x+1| + 3\ln|x+3| + C$.

(c) Implicit derivering ger

$\cos(x+y)(1+y') = 2 - 2y'$.

Insättning av $x = \pi$ och $y = \pi$ ger att $y'(\pi) = \dfrac{1}{3}$.

Så

$y - \pi = \dfrac{1}{3}(x-\pi) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2\pi}{3}$.

(d) $e^{\sin x}\cos x = 0$ då $x = \dfrac{\pi}{2}$. Arean av det begränsade området blir då

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x\,dx \left\{\begin{array}{c} u = \sin x \\ du = \cos x\,dx \\ x = \pi/2 \Leftrightarrow u = 1 \\ x = 0 \Leftrightarrow u = 0 \end{array}\right\} = \int_0^1 e^u\,du = e - 1.$$

(e) När vi beräknar översumman tar vi vänster ändpunkt då $-1 \le x \le 0$ (f strängt avtagande i detta intervall) och höger ändpunkt då (f strängt växande i detta intervall) $0 \le x \le 1$ och får då

$$S_{1/2} = \frac{1}{2}\left(f(-1) + f(-1/2) + f(1/2) + f(1)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + 1\right) = \frac{17}{16}.$$

2. (a) Se boken.

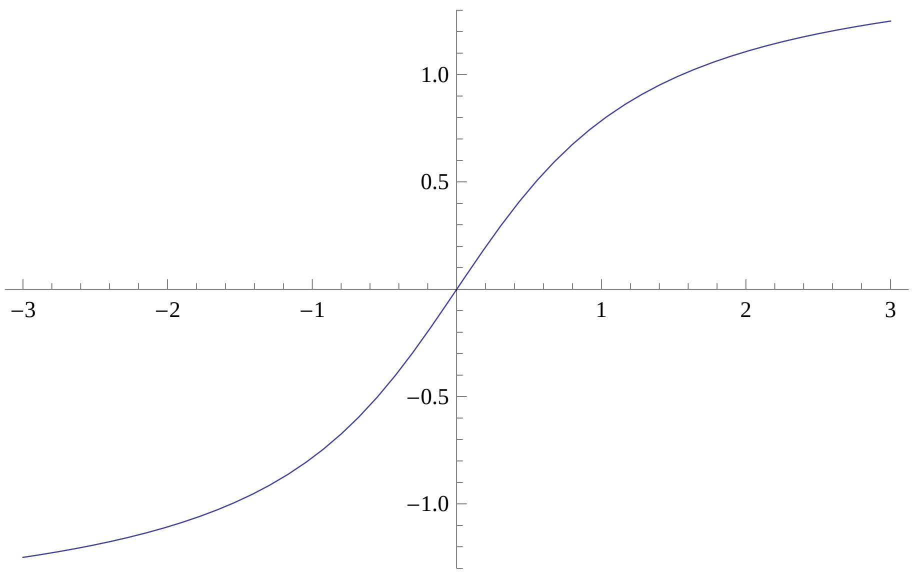
(b) Se boken.

(c) Falskt. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^2 e^{t^2}\,dt = 0$.

3. (a) Se boken.

(b) Nej. Tag till exempel $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$, men i $(0,0)$ har vi en inflexionspunkt och inte ett lokalt- maximum eller minimum.

(c) $f(x) = \arctan x$ är ett exempel på en funktion som är konvex då $x < 0$ och konkav då $x > 0$.



4. (a) $\lim_{x\to 0^+} xe^{-1/x} = 0$ och på vänstergänsvärdet tillämpar vi l'Hospitals regel och får då

$$\lim_{x\to 0^-} xe^{-1/x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{1/x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}\cdot \frac{1}{x^2}}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0^-} e^{-1/x} = \text{"-}\infty\text{"},$$

och vi ser att gränsvärdet $\lim_{x\to 0} xe^{-1/x}$ existerar ej.

(b) Vi ser från (a) att då $x \to 0^-$ har vi en lodrät asymptot. Vi undersöker om det finns någon sned asymptot.

$\dfrac{xe^{-1/x}}{x} = e^{-1/x} \to 1$, då $x \to \pm\infty$ (så ett eventuellt k-värde är 1.)

För att undersöka eventuellt m-värde tillämpar vi åter igen l'Hospitals regel

$$xe^{-1/x} - x = x(e^{-1/x} - 1) = \frac{e^{-1/x} - 1}{1/x} = \frac{e^{-1/x}\cdot \frac{1}{x^2}}{-1/x^2} = -e^{-1/x} \to -1 \text{ då } x \to \pm\infty,$$

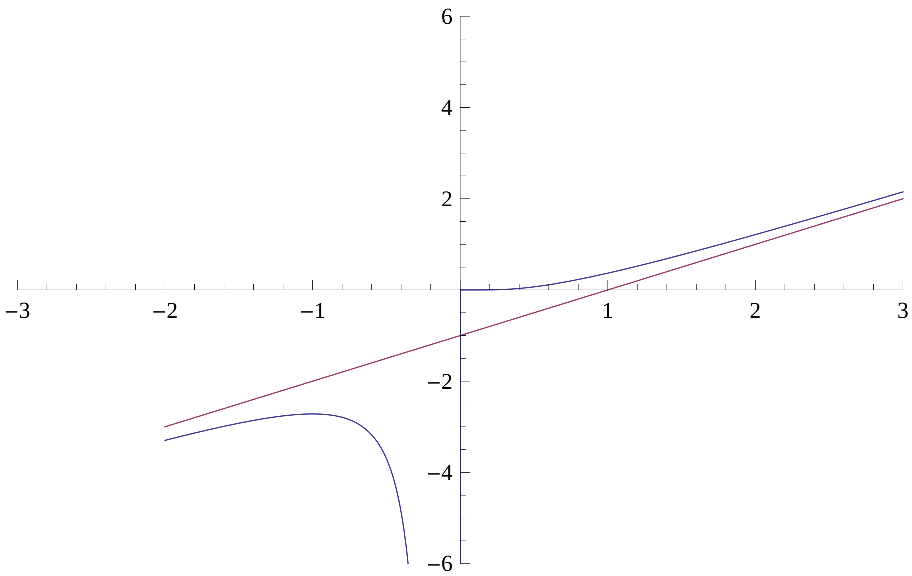
så $y = x - 1$ är en sned asymptot.

(c) Vi börjar med att derivera $f(x) = xe^{-1/x}$ och får då

$$f'(x) = e^{-1/x} + xe^{-1/x}(1/x^2) = e^{-1/x}(1 + \frac{1}{x}),$$

och vi ser att vi har en extrempunkt i $x = -1$. Teckenstudier visar att vi har ett lokalt maximum i $(-1, -e)$.

(d) Skissera grafen



5. (a) Sant. För en udda funktion gäller att $f(x) = -f(-x)$ och vi ska visa att om vi deriverar en udda funktion får vi en jämn funktin.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(-f(-x)) = -\frac{d}{dx}f(-x) = -\frac{d}{dx}f(-x)(-1) = \frac{d}{dx}f(-x) = f'(-x).$$

(b) Sant. Om vi gör variabelbytet $\dfrac{\pi}{2} - x$ får vi

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin(\frac{\pi}{2} - x)\,dx = -\int_{\pi/2}^0 f(\sin u)\,du = \int_0^{\pi/2} f(\sin u)\,du = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx.$$

(c) Sant. Eftersom $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, måste det existera ett N så att när $x > N$ så är $f(x) \geq \frac{1}{2}$.

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^N f(x)\,dx + \int_N^\infty f(x)\,dx$$

där vi ser att den första integralen i högerledet har ett ändligt värde medan den andra integralen i högerledet måste vara divergent enligt jämförelsekriteriet

$$\int_N^\infty \frac{1}{2}\,dx \quad \text{divergent} \Rightarrow \int_N^\infty f(x)\,dx \quad \text{divergent.}$$

6. Vi ställer på gemensamt bråkstreck och tillämpar l'Hospitals regel och får då

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(4x)}{x^3} + \frac{a}{x^2} + b\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(4x) + ax + bx^3}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{4\cos(4x) + a + 3bx^2}{3x^2}\right).$$

Vi ser att $3x^2 \to 0$ då $x \to 0$ och att $4\cos(4x) + a + 3bx^2 \to 4 + a$ då $x \to 0$, så om ett gränsvärde ska kunna existera måste $4 + a = 0$ d.v.s. $a = -4$.

Vi tillämpar återigen l'Hospitals regel(två gånger) och får då

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{4\cos(4x) - 4 + 3bx^2}{3x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-16\sin(4x) + 6bx}{6x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-64\cos(4x) + 6b}{6}\right) = \frac{-64 + 6b}{6} = 1$$

och vi får att $b = \frac{35}{3}$.

7. Om vi roterar cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ runt $x-$ axeln får vi ett klot med radien 2. Den bortborrade delen består av en cylinder, samt två sfäriska kalotter. Eftersom cylinderns radie är 1 och klotets radie är 2 får vi genom att tillämpa pythagoras sats att höjden i cylindern är $2\sqrt{3}$. Så volymen av cylinder blir $V_c = 2\pi\sqrt{3}$. De sfäriska kalotternas volym fås genom att låta kurvan $y = \sqrt{4 - x^2}$ rotera runt $x-$axeln, på intervallet $[\sqrt{3}, 2]$ och multiplicera med 2. Skivmetoden ger då

$$V_k = 2\int_{\sqrt{3}}^2 \pi(\sqrt{4 - x^2})^2\,dx = 2\pi\int_{\sqrt{3}}^2 (4 - x^2)\,dx = 2\pi(\frac{16}{3} - 3\sqrt{3})$$

Så den sökta volymen blir då

$$V = V_{\text{klot}} - V_{\text{cylinder}} - V_{\text{kalotter}} = \frac{32\pi}{3} - 2\pi\sqrt{3} - 2\pi(\frac{16}{3} - 3\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}\pi.$$