MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola Datum: 171221 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen Telefonvakt: Johannes Borgqvist
5325

MVE475 Inledande Matematisk Analys

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2017 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 35 resp. 45 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 8 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Härled (bevisa) deriveringsregeln för $\arccos x$. (3p)

(b) Antag att $f(x) + x^2[f(x)]^2 = 12$ och $f(1) = 3$. Bestäm $f'(1)$. (3p)

3. Funktionen $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ är given.

(a) Undersök om f har några asymptoter. Motivera ditt svar! (2p)

(b) Undersök om f har någon/några extrempunkter. Ange i så fall denna/dessa! (2p)

(c) Skissera grafen till f. (1p)

4. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$. (5p)

5. En 5 meter lång stege står lutad mot en vertikal vägg. Stegens nedre del börjar glida med en hastighet av 1 m/s. Med vilken hastighet ändrar sig vinkeln mellan stegen och marken, då stegen är 3 meter från väggen. (4p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar.
(Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Att $\lim_{x\to\infty}(f(x)+x)=0$, innebär att $y=x$ är en sned asymptot till kurvan $y=f(x)$. (1p)

(b) Ekvationen $3x+2\cos x+5=0$ har exakt en reell rot. (2p)

(c) Antag att f' är kontinuerlig på $[0,\infty)$ och att $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$. (2p)
Då är $\int_0^\infty f'(x)\;dx=-f(0)$.

7. Bestäm konstanten a så att (5p)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\sqrt{e}.$$

8. Ett område i första kvadranten begränsas av kurvan $y=x^2e^{-x^2/2}$, linjen $x=2$ och $x-$axeln. Om vi roterar detta område kring $y-$ axeln får vi en skål. Hur många liter vatten kan vi hälla i denna skål innan det rinner över? Längdenheten är dm. (6p)

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	MVE475 Inledande Matematisk Analys 171221	sid.numme 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna arean av det område som begränsas av kurvorna $y = x^2 - 2x$ och $y = x + 4$. (3p)
Rita figur!

Lösning:

Svar: ....

(c) Beräkna $f'(-1)$ när $f(x) = \arctan(2x + 1)$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna integralen $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x \, dx$. (4p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Kurvorna $y = x^2$ och $y = x$ avgränsar tillsammans ett område i första kvadranten. (3p)
Beräkna volymen av den kropp som skapas då området roterar kring $y-$ axeln.

Lösning:

Lösningar MVE475, Inledande Matematisk Analys, 171221

1. (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\sin x} = \{\text{l'Hospital}\} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2e^{2x}}{\cos x} = 2.$

(b) A$=\displaystyle\int_{-1}^{4} (x+4-(x^2-2x))\,dx = \int_{-1}^{4} (4+3x-x^2)\,dx = ... = \frac{125}{6}.$

(c) $f'(x) = \dfrac{1}{1+(2x+1)^2}\cdot 2 \Rightarrow f'(-1) = 1.$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} (1-cos^2 x)\cos^2 x \sin x\,dx = -\int_1^0 (1-u^2)u^2\,du =$
$\displaystyle\int_0^1 (u^2-u^4)\,du = ... = \frac{2}{15}.$

(e) V$=\displaystyle\int_0^1 2\pi x(x-x^2)\,dx = ... = \frac{\pi}{6}.$

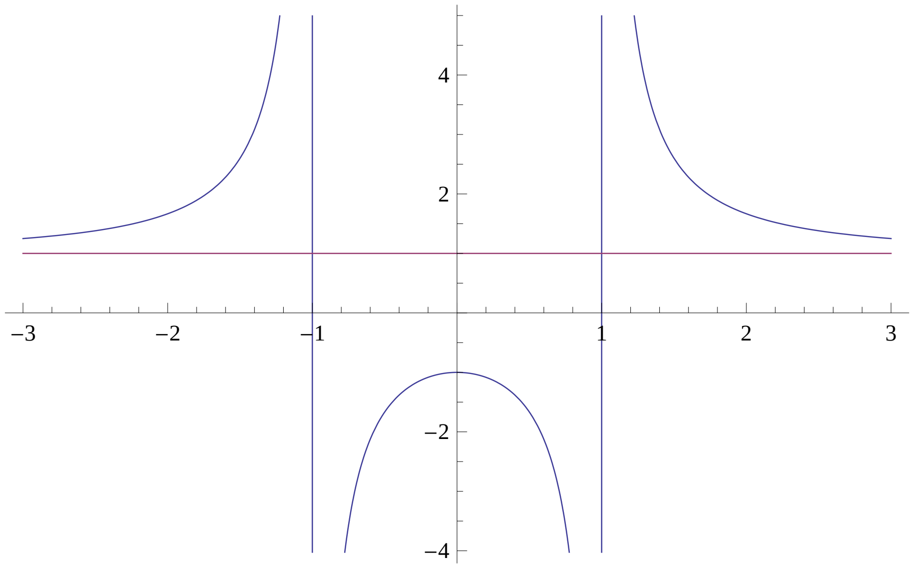
2. (a) Se boken.

(b) $\dfrac{d}{dx}\{f(x)+x^2[f(x)]^2\} = \dfrac{d}{dx}12 \;\Rightarrow\; f'(x)+2x(f(x))^2+x^2 2f(x)f'(x) = 0 \Rightarrow$
$f'(1)+2(f(1))^2+2f(1)f'(1) = 0.$
Insättning av givna värde ger att
$f'(1) = -\dfrac{18}{7}.$

3. (a) $f(x)\to 1$, då $x\to\pm\infty$, så $y=1$ är en vågrät asymptot.
Vi har även lodräta asymptoter(visa detta) då $x=\pm 1$.

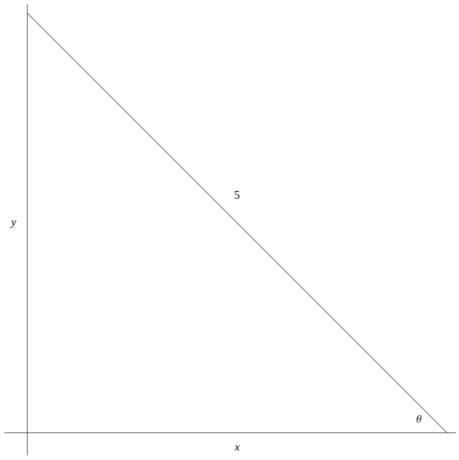
(b) $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2-1)^2} = 0$ för $x=0$. Vi ser att vi har ett loaklt maximum i $(0,-1)$.

(c) Skissera grafen



4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx =$
$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_0^t (\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2})\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t (\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2})\,dx =$
$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \ln\frac{x+1}{x+2} - \ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2.$

5. Rita figur!



Vi söker $\dfrac{d\theta}{dt}$ då $x = 3$. Enligt figurens beteckningar har vi att

$$\cos\theta = \frac{x}{5} \Rightarrow -\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}\frac{dx}{dt}(*)$$

Vi har givet i texten att $\dfrac{dx}{dt} = 1$ och att i det ögonblick då $x = 3$ har vi att $y = 4 \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{4}{5}$. Insättning i (*) ger att

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{4}\,\text{rad/s}.$$

6. (a) Falskt. Att $\lim_{x\to\infty}(f(x) + x) = 0$ innebär att $y = -x$ är en sned asymptot till kurvan och inte $y = x$.

(b) Sant. Om vi sätter $f(x) = 3x + 2\cos x + 5$ har vi att $f(0) = 7 > 0$ och $f(-\pi) = -3\pi + 3 < 0$. Eftersom f är kontinuerlig på $\mathbb{R}$ (och då även på $[-\pi, 0]$), säger satsen om mellanliggande värden att det finns minst ett tal $c \in [-\pi, 0]$ så att $f(c) = 0$. Återstår att visa att det endast finns ett nollställe till f, vilket vi gör genom att studera derivatan till f.

$$f'(x) = 3 - 2\sin x > 0 \Rightarrow \text{f strängt växande},$$

så f har exakt ett nollställe och därmed har ekvationen $3x + 2\cos x + 5 = 0$ exakt en rot.

(c) Sant. $\displaystyle\int_0^\infty f'(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t f'(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}[f(t) - f(0)] = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0) = 0 - f(0) = -f(0)$.

7. För att beräkna gränsvärdet i vänster led tillämpar vi l'Hospitals regel

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x = e^{\ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x} e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x-a}{x+a}}{1/x}} = \left(„\frac{0}{0}"\right) = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x-a)-\ln(x+a)}{1/x}} =$$

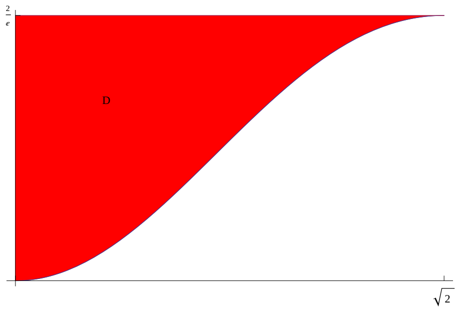
$$(\text{l'Hospital}) = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}}{-1/x^2}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2a\cdot(-x^2)}{(x-a)(x+a)}} = e^{-2a},$$

så

$$e^{-2a} = e^{1/2}$$

vilket ger att $a = -\dfrac{1}{4}$.

8. Om vi deriverar $y = f(x)$ får vi $f'(x) = (2x - x^3)e^{-x^2/2} = 0$ då $x = \sqrt{2}$ och vi ser att vi har ett lokalt maximum i $(\sqrt{2}, \dfrac{2}{e})$. Vi skisserar grafen till f, linjen $y = \dfrac{2}{e}$ (som är övre nivån för vattenytan innan det rinner över) och vi ska då rotera området D ett varv kring y-axeln. Volymen vi får motsvarar den mängd vatten, i liter, vi kan fylla på innan det rinner över.



För beräkning använder vi oss av cylinderskalmetoden:

$$V = \int_0^{\sqrt{2}} 2\pi x\left(\frac{2}{e} - x^2 e^{-x^2/2}\right) dx = \frac{4\pi}{e} - 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{-x^2/2}\, dx = \frac{4\pi}{e} - 2\pi \int_0^{1} 2ue^{-u}\, du =$$

$$\frac{4\pi}{e} + \frac{4\pi}{e} + \frac{4\pi}{e} - 4\pi = 4\pi\left(\frac{3}{e} - 1\right).$$