Exempel: Funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 \arctan(x)}{5x-2}$$

har en sned asymptot då $x \to \infty$. Bestäm denna.

Lösning: Att $f(x)$ har en sned asymptot då $x \to \infty$ innebär att det finns k, m så att $f(x) \sim kx + m$ då x är stort. Här är

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

och

$$m = \lim_{x\to\infty} f(x) - kx.$$

I det aktuella fallet finner vi

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \arctan(x)}{x(5x-2)} = \frac{\pi}{10},$$

eftersom $\arctan(x)$ går mot $\pi/2$ då x går mot ∞ och $\frac{x^2}{x(5x-2)}$ går mot $1/5$.

Låt oss nu räkna ut m-värdet. För detta vill vi betrakta uttrycket

$$\frac{x^2 \arctan(x)}{5x-2} - \frac{\pi}{10}x = \frac{x^2(\arctan(x) - \pi/2)}{5x-2} + \frac{\pi x}{5(5x-2)}$$

då x är stort. Den senare termen har gränsvärde $\pi/25$ då x går mot ∞. Den första termen har termer som både går mot 0 och ∞, men efter en omskrivning ser vi att

$$\frac{x^2(\arctan(x) - \pi/2)}{5x-2} = \frac{\arctan(x) - \pi/2}{5/x - 2/x^2}$$

som är på formen '0/0' då x går mot ∞. Alltså kan vi använda l'Hôpitals regel. Vi finner att gränsvärdet är

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan(x) - \pi/2}{5/x - 2/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/(1+x^2)}{-5/x^2 + 4/x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(-5+4/x)} = \frac{-1}{5}.$$

Svar: Den sneda asymptoten då x går mot ∞ ges av $y = \frac{\pi}{10}x - \frac{1}{5} + \frac{\pi}{25}$.