Lista på satser och bevis

Nedan finns en lista på satser som vi gått igenom i kursen. Vissa satser är en del av överbetygsnivån, men vissa är en del av godkäntnivån (det är som sagt bara en indikation på uppfattad svårighetsgrad). I de flesta fall ska man inte bara kunna formulera satserna, men också kunna bevisa dem.

Kapitel 2

Sats 1 (Sats 4, Kapitel 2.8)**.** *Om f är differentierbar i a så är f kontinuerlig i a.*

Sats 2 (Gränsvärdeslagar, Kapitel 2.3, see pdf:en Produkt av gränsvärdenpp-å hemsida för bevis, eller föreläsningsanteckningar)**.** *Antag att f och g är funktioner så att $\lim_{x\to a} f(x) = L$ och $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Då gäller det att $\lim_{x\to a} fg = LM$.*

Kapitel 3

Sats 3 (Derivator av polynom och exponentialfunktioner, Kapitel 3.1)**.** *Derivatan av $f(x) = x^n$ är $f'(x) = nx^{n-1}$ och derivatan av $f(x) = e^x$ är $f'(x) = e^x$.*

Sats 4 (Produktregeln, Kapitel 3.2)**.** *Om f och g är deriverbara, så är*

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Sats 5 (Derivata av sin(x), Kapitel 3.3)**.** *Derivatan av $\sin(x)$ är $\cos(x)$.*

Sats 6 (Kedjeregeln, Kapitel 3.4)**.** *Om g är deriverbar vid x och f är deriverbar vid $g(x)$, så är den sammansatta funktionen $F = f \circ g$ definierad av $F(x) = f(g(x))$ deriverbar vid x, och*

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

I Leibniz notation, om $y = f(z), z = g(x)$, kan detta skrivas som

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Sats 7 (Derivata av a^x, Kapitel 3.4)**.** *Antag $a > 0$. Då är derivatan av a^x är $a^x \ln a$.*

Sats 8 (Derivata av inversa trigonometriska funktioner och logaritmer, Kapitel 3.5)**.** *Följande formler för derivator gäller:*

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

Sats 9 (Implicita funktionssatsen, se pdf på hemsida, behöver enbart kunna formulering)**.** *Antag att $F(x, y) = 0$ är en ekvation där (a, b) är en punkt så att $F(a, b)$. Skriv F_y för derivatan av F med avseende på y där vi betraktar x som en konstant. Om det gäller att $F_y(a, b) \neq 0$ kan vi skriva $y = y(x)$ för x nära a, och y är deriverbar i punkten $x = a$.*

Kapitel 4

Sats 10 (Sats om största och minsta värde, Sats 3, Kapitel 4.1)**.** *Om f är kontinuerlig på ett slutet intervall $[a, b]$ så har f ett globalt maximimum och ett globalt minimum i intervallet. Vi har inte egentligen bevisat satsen, utan jag efterfrågar enbart formulering.*

Sats 11 (Fermats sats, Kapitel 4.1)**.** *Om f är deriverbar på (a, b) och $c \in (a, b)$ är ett lokalt max eller lokalt min, så är $f'(c) = 0$.*

Sats 12 (Rolles sats, Kapitel 4.2)**.** *Antag att f är en funktion som är kontinuerlig på $[a, b]$, deriverbar på (a, b) och uppfyller $f(a) = f(b)$. Då finns ett $c \in (a, b)$ så att $f'(c) = 0$.*

Sats 13 (Medelvärdessatsen, Kapitel 4.2)**.** *Antag att f är en funktion som är kontinuerlig på $[a, b]$, deriverbar på (a, b). Då finns ett $c \in (a, b)$ så att*
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Sats 14 (Sats om tecken på derivatan, Kapitel 4.3)**.** *Antag att f är deriverbar på intervallet (a, b). Då gäller att*

- *om $f'(x) = 0, x \in (a, b)$, så är f konstant.*
- *om $f'(x) > 0, x \in (a, b)$, så är f växande.*
- *om $f'(x) < 0, x \in (a, b)$, så är f avtagande.*

Sats 15 (L'Hôpitals regel, Kapitel 4.4)**.** *Antag f, g är funktioner som är deriverbara funktioner, och $\lim_{x\to a} f = \lim_{x\to a} g$ är båda 0 eller båda $\pm\infty$. Här kan a vara ett reellt tal eller $\pm\infty$. Då gäller det att*
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Det räcker att bevisa satsen under förenklande hypoteser såsom att f är kontinuerlig i a och $a \in \mathbb{R}$.

Sats 16 (Sats om primitiva funktioner, Kapitel 4.9)**.** *Antag f är en funktion definierad på ett intervall I. Om F och G är primitiva funktioner till f, så är $F = G + c$, där c är en konstant.*

Kapitel 5

Sats 17 (Analysens huvudsats, del 1 och 2, Kapitel 5.3)**.** *Antag att f är kontinuerlig på $[a, b]$. Då gäller det att, om $x \in (a, b)$ så är*

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

deriverbar, och $g'(x) = f(x)$. Vidare om F är en primitiv funktion till f så gäller det att

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Sats 18 (Formel för variabelsubstition, Kapitel 5.5)**.** *Om g är deriverbar och g' kontinuerlig på ett intervall I, och f är deriverbar på de värden som $u = g(x)$ antar, så gäller det att*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Sats 19 (Integraler om symmetriska funktioner, Kapitel 5.5)**.** *Antag att f är en jämn funktion, dvs. $f(-x) = f(x)$. Då gäller det att*

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Antag att f är en udda funktion, dvs. $f(-x) = -f(x)$. Då gäller det att

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Kapitel 6

Sats 20 (Medelvärdessatsen för integraler, Kapitel 6.5)**.** *Om f är kontinuerlig på ett intervall $[a, b]$, så finns ett c i $[a, b]$ så att*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Kapitel 7

Sats 21 (Partiell integration, Kapitel 7.1)**.** *Antag att f och g är deriverbara funktioner, och att G är en primitiv funktion till g. Då gäller det att*

$$\int fg'dx = fg - \int gf'dx$$

eller i princip ekvivalent

$$\int fgdx = fG - \int Gf'dx.$$